# 第九章　二阶电路分析

由二阶微分方程描述的电路称为二阶电路。分析二阶电路的方法仍然是建立二阶微分方程，并利用初始条件求解得到电路的响应。本章主要讨论含两个动态元件的线性二阶电路，重点是讨论电路的零输入响应。最后介绍如何利用计算机程序分析高阶动态电路。

## §9－1　*RLC*串联电路的零输入响应

### 一、*RLC*串联电路的微分方程

为了得到图9－1所示*RLC*串联电路的微分方程，先列出KVL方程

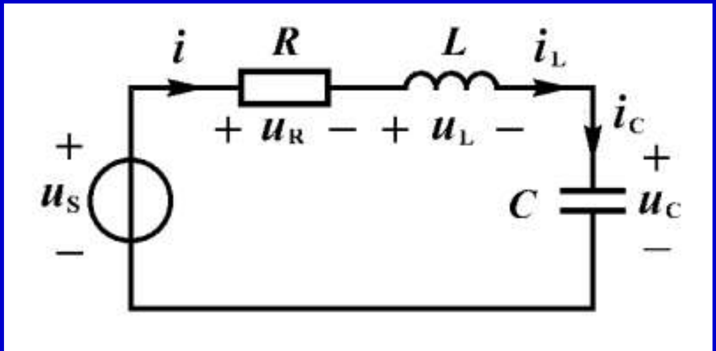


图9－1 *RLC*串联二阶电路

$$u_R(t)+u_L(t)+u_C(t)=u_S(t)$$

$$i(t)=i_L(t)=i_C(t)=C\frac{\mathrm{d}u_c}{\mathrm{d}t}$$

$$u_R(t)=Ri(t)=RC\frac{\mathrm{d}u_c}{\mathrm{d}t}\qquad u_L(t)=L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}=LC\frac{\mathrm{d}^2u_c}{\mathrm{d}t^2}$$

根据前述方程得到以下微分方程

$$LC\frac{\mathrm{d}^2u_C}{\mathrm{d}t^2}+RC\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}+u_C=u_S(t) \qquad (9-1)$$

这是一个常系数非齐次线性二阶微分方程。

零输入响应方程为

$$LC\frac{\mathrm{d}^2u_C}{\mathrm{d}t^2}+RC\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}+u_C=0 \qquad (9-2)$$

其特征方程为

$$LCs^2+RCs+1=0 \qquad (9-3)$$

其特征根为

$$s_{1,2}=-\frac{R}{2L}\pm\sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2-\frac{1}{LC}} \qquad (9-4)$$

电路微分方程的特征根，称为电路的固有频率。当$R$，$L$，$C$的量值不同时，特征根可能出现以下三种情况

1. $R > 2\sqrt{\dfrac{L}{C}}$ 时， $S_1, S_2$ 为不相等的实根。过阻尼情况。

2. $R = 2\sqrt{\dfrac{L}{C}}$ 时，$S_1, S_2$ 为两个相等的实根。临界阻尼情况。

3. $R < 2\sqrt{\dfrac{L}{C}}$ 时，$S_1, S_2$ 为共轭复数根。欠阻尼情况。

## 二、过阻尼情况

当 $R > 2\sqrt{\frac{L}{C}}$ 时，电路的固有频率$s_1$，$s_2$为两个不相同的实数，齐次微分方程的解答具有下面的形式

$$u_C(t) = K_1 e^{s_1 t} + K_2 e^{s_2 t} \qquad (9-5)$$

式中的两个常数$K_1$，$K_2$由初始条件$i_L(0)$和$u_c(0)$ 确定。

$$u_C(0) = K_1 + K_2 \qquad (9-6)$$

对式(9－5)求导，再令$t$=0得到

$$\frac{\mathrm{d}u_C(t)}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0} = K_1 s_1 + K_2 s_2 = \frac{i_L(0)}{C} \qquad (9-7)$$

求解以上两个方程，可以得到

$$K_1 = \frac{1}{s_2 - s_1}\left[ s_2 u_C(0) - \frac{i_L(0)}{C} \right]$$

$$K_2 = \frac{1}{s_1 - s_2}\left[ s_1 u_C(0) - \frac{i_L(0)}{C} \right]$$

由此得到电容电压的零输入响应，再利用KCL方程和电容的VCR可以得到电感电流的零输入响应。

例9-1 电路如图9-1所示，已知$R$=3Ω,$L$=0.5H, $C$=0.25F, $u_C(0)$=2V, $i_L(0)$=1A，求电容电压和电感电流的零输入响应。

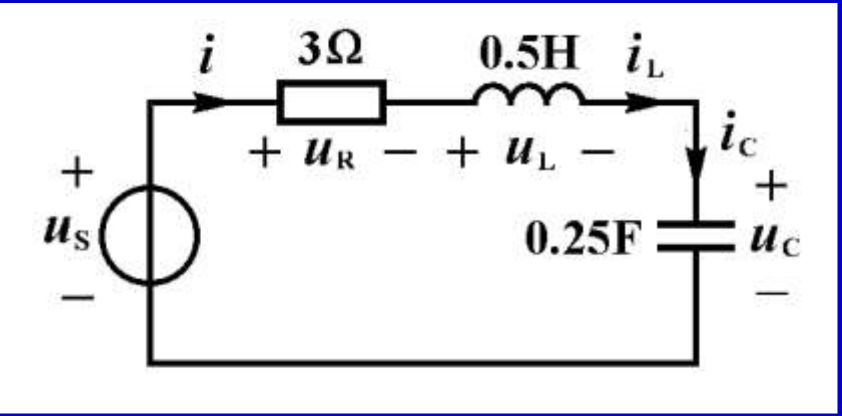



图9－1 *RLC*串联二阶电路

解：将$R$，$L$，$C$的量值代入式（9－4）计算出固有频率

$$s_{1,2}=-\frac{R}{2L}\pm\sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2-\frac{1}{LC}}=-3\pm\sqrt{3^2-8}=-3\pm1=\begin{cases}-2\\-4\end{cases}$$

将固有频率$s_1$=-2和$s_2$=-4代入式（9—5）得到

$$u_C(t) = K_1 e^{-2t} + K_2 e^{-4t} \qquad (t \geq 0)$$

利用电容电压的初始值$u_C(0)$=2V和电感电流的初始值$i_L(0)$=1A得到以下两个方程：

$$u_C(0) = K_1 + K_2 = 2$$

$$\left.\frac{\mathrm{d}u_C(t)}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} = -2K_1 - 4K_2 = \frac{i_L(0)}{C} = 4 \longrightarrow \begin{array}{l} K_1 = 6 \\ K_2 = -4 \end{array}$$

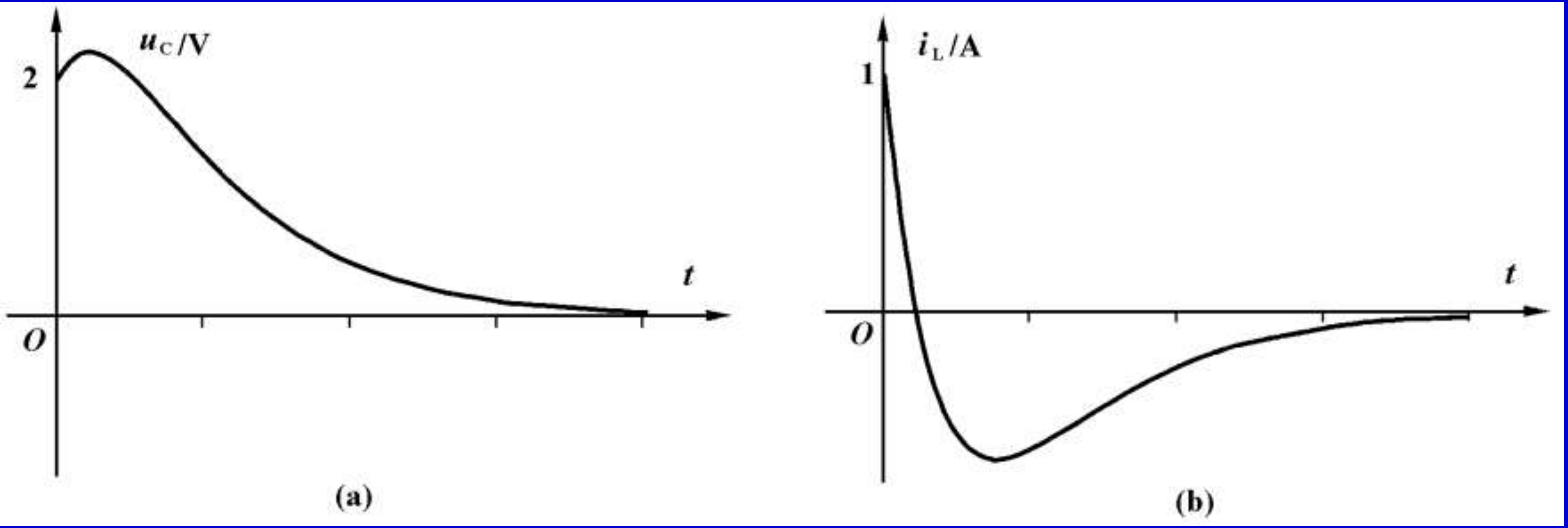
最后得到电容电压的零输入响应为

$$u_C(t) = (6e^{-2t} - 4e^{-4t})\mathrm{V} \qquad (t \geq 0)$$

利用KCL和电容的VCR方程得到电感电流的零输入响应

$$i_L(t) = i_C(t) = C\frac{du_C}{dt} = (-3e^{-2t} + 4e^{-4t})\text{A} \qquad (t \geq 0)$$

从图示电容电压和电感电流的波形曲线，可以看出电路各元件的能量交换过程。



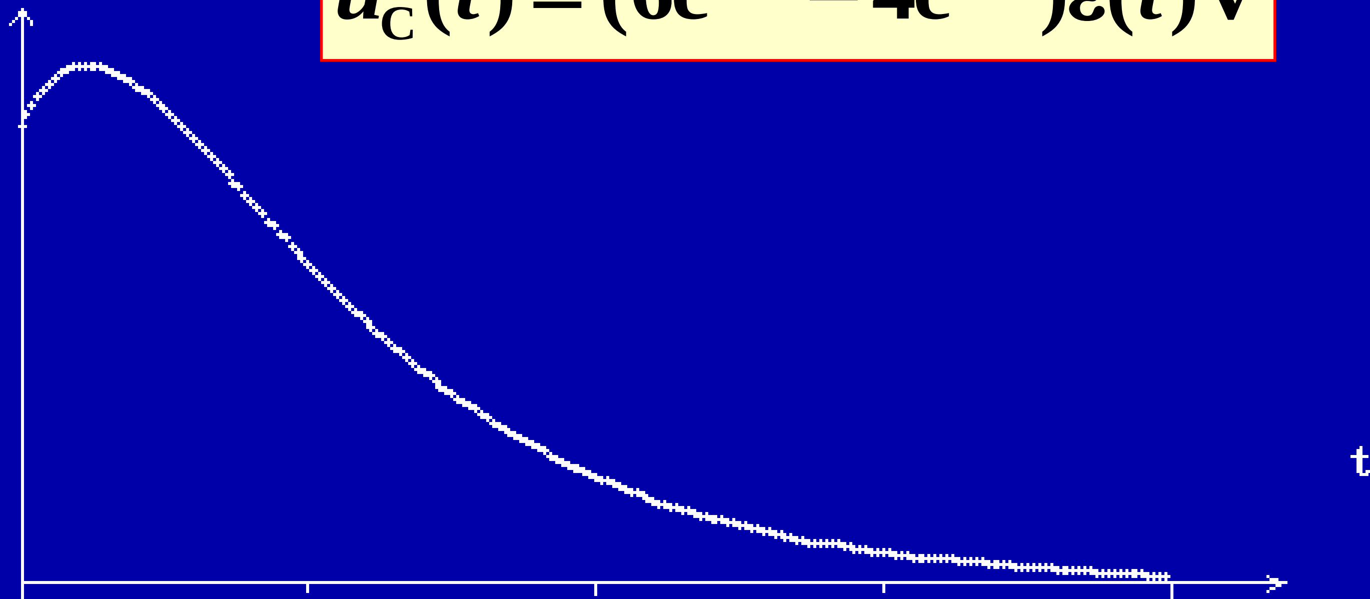
(a) (b)

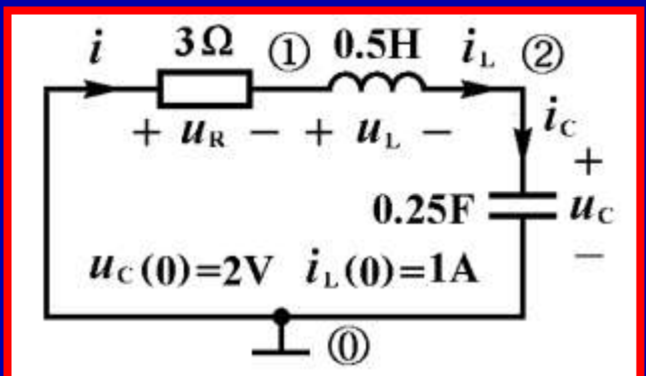
Press [Enter] Key to Continue

```
u3 (t) =   .000     δ(t)
        + ε(t)*  (   6.00     +j  .000     )*exp( -2.00     +j  .000     )t
        + ε(t)*  ( -4.00      +j  .000     )*exp( -4.00     +j  .000     )t
```

$$u_C(t) = (6e^{-2t} - 4e^{-4t})\varepsilon(t)\text{V}$$

电容电压的零输入响应波形

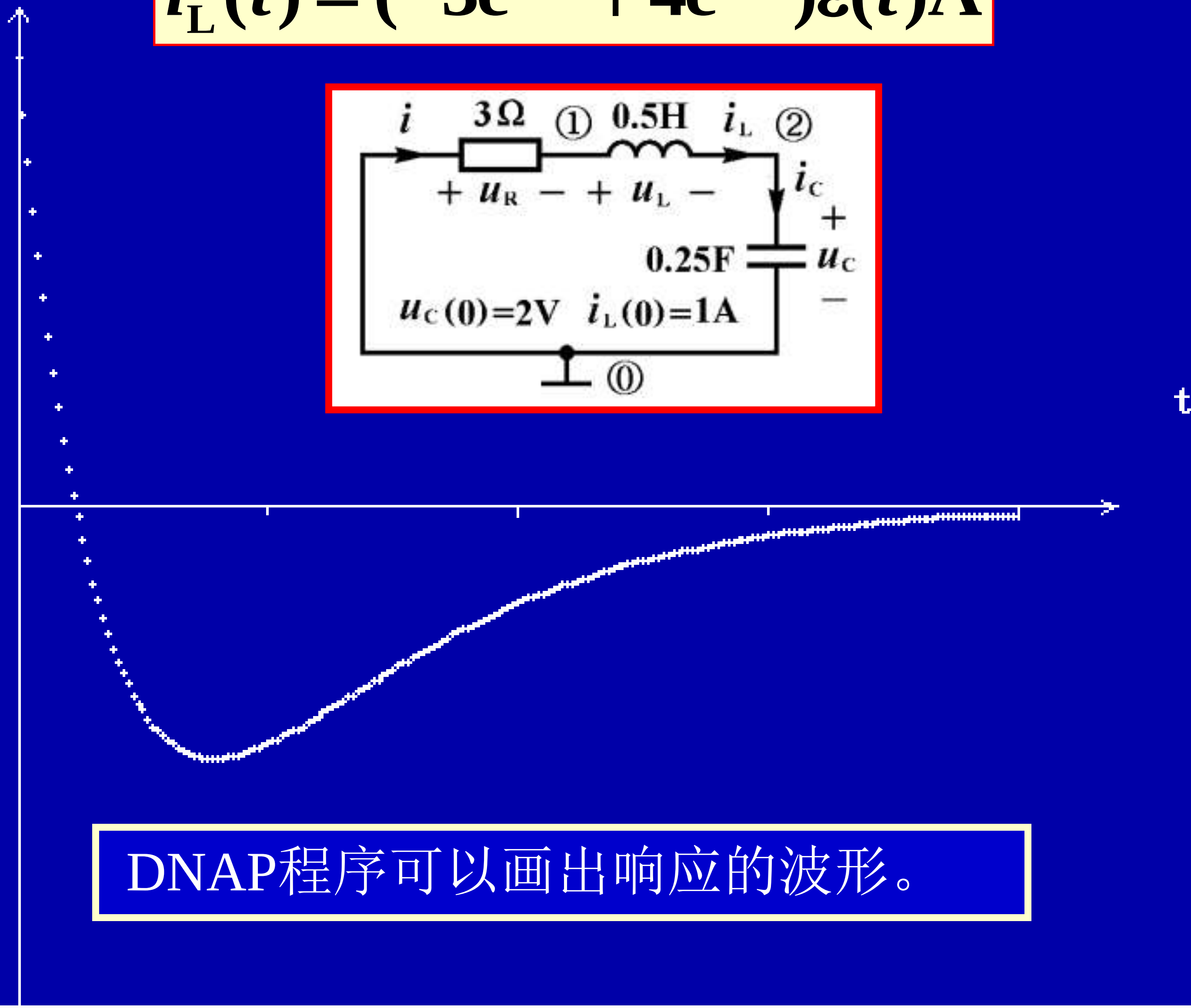


Press [Enter] Key to Continue

```
iZ (t) =   .000     δ(t)
        + ε(t)*  ( -3.00    +j  .000    )*exp( -2.00    +j  .000    )t
        + ε(t)*  (  4.00    +j  .000    )*exp( -4.00    +j  .000    )t
```

$$i_L(t)=(-3e^{-2t}+4e^{-4t})\varepsilon(t)\mathrm{A}$$




电感电流的零输入响应波形

DNAP程序可以画出响应的波形。

## 三、临界情况

当 $R=2\sqrt{\dfrac{L}{C}}$ 时，电路的固有频率$s_1, s_2$为两个相同的实数$s_1$=$s_2$=$s$ 。齐次微分方程的解答具有下面的形式

$$u_C(t)=K_1\mathrm{e}^{st}+K_2t\mathrm{e}^{st} \qquad (9-8)$$

式中的两个常数$K_1$，$K_2$由初始条件$i_L(0)$和$u_C(0)$ 确定。令式(9-5)中的$t$=0得到

$$u_C(0)=K_1 \qquad (9-9)$$

对式(9—5)求导，再令得到

$$\left.\frac{\mathrm{d}u_{\mathrm{C}}(t)}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} = K_1 s + K_2 = \frac{i_{\mathrm{L}}(0)}{C} \qquad (9-10)$$

联立求解以上两个方程，可以得到

$$K_1 = u_{\mathrm{C}}(0)$$

$$K_2 = \frac{i_{\mathrm{L}}(0)}{C} - s_1 u_{\mathrm{C}}(0)$$

将 $K_1$, $K_2$的计算结果，代入式（9—8）得到电容电压的零输入响应，再利用KCL方程和电容的VCR可以得到电感电流的零输入响应。

例9-2 电路如图9-1所示。已知已知$R$=1 Ω，$L$=0.25 H，$C$=1 F，$u_C(0)$=-1V，$i_L(0)$=0，求电容电压和电感电流的零输入响应。

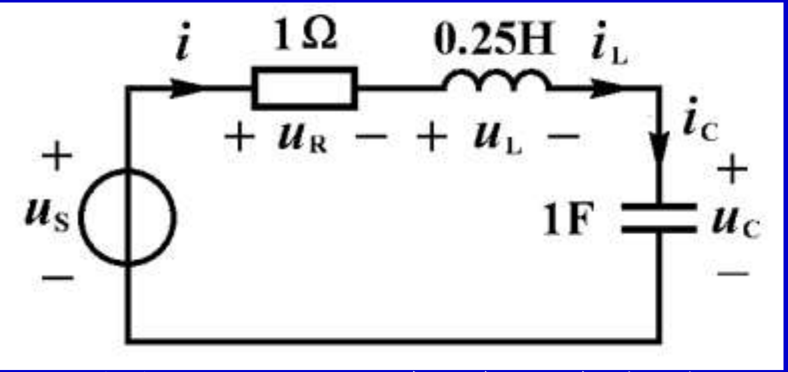



图9－1 *RLC*串联二阶电路

解：将$R$，$L$，$C$的量值代入式(9-4)计算出固有频率的数值

$$s_{1,2}=-\frac{R}{2L}\pm\sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2-\frac{1}{LC}}=-2\pm\sqrt{2^2-4}=-2\pm 0=\begin{cases}-2\\-2\end{cases}$$

将两个相等的固有频率$s_1=s_2=-2$ 代入式（9—8）得到

$$u_c(t)=K_1\mathrm{e}^{-2t}+K_2t\mathrm{e}^{-2t}\qquad (t\geq 0)$$

利用电容电压的初始值$u_C(0)=-1\mathrm{V}$和电感电流的初始值$i_L(0)=0$得到以下两个方程

$$u_C(0)=K_1=-1$$

$$\left.\frac{\mathrm{d}u_C(t)}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}=-2K_1+K_2=\frac{i_L(0)}{C}=0$$

求解以上两个方程得到常数$K_1$=-1和$K_2$=-2，得到电容电压的零输入响应

$$u_{\mathrm{C}}(t)=(-\mathrm{e}^{-2t}-2t\mathrm{e}^{-2t})\mathrm{V} \qquad (t\geq 0)$$

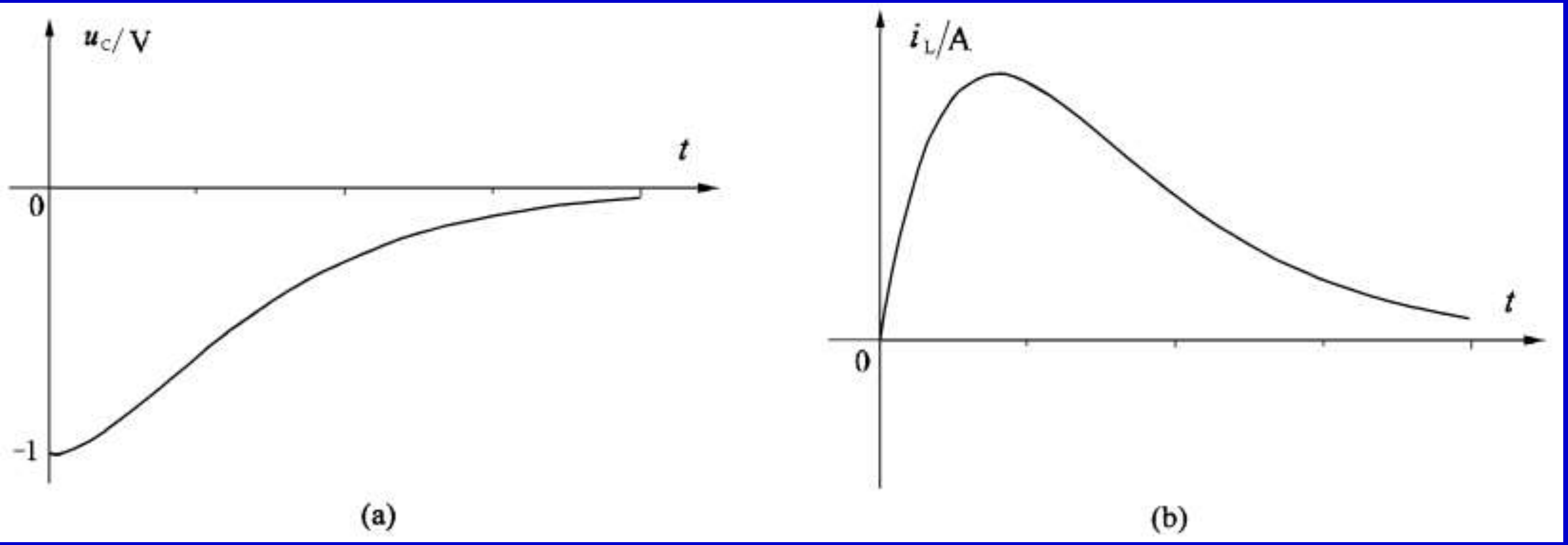
得到电感电流的零输入响应

$$\begin{aligned} i_{\mathrm{L}}(t)&=i_{\mathrm{C}}(t)=C\frac{\mathrm{d}u_{\mathrm{C}}}{\mathrm{d}t}\\ &=(2\mathrm{e}^{-2t}-2\mathrm{e}^{-2t}+4t\mathrm{e}^{-2t})\mathrm{A}\\ &=4t\mathrm{e}^{-2t}\mathrm{A} \qquad (t\geq 0)\end{aligned}$$

$$u_C(t) = (-e^{-2t} - 2te^{-2t})\text{V} \qquad (t \geq 0)$$

$$i_L(t) = i_C(t) = 4te^{-2t}\text{A} \qquad (t \geq 0)$$

根据以上两个表达式用计算机程序DNAP画出的波形曲线，如图9－3所示。




(a) 电容电压的波形　　(b) 电感电流的波形

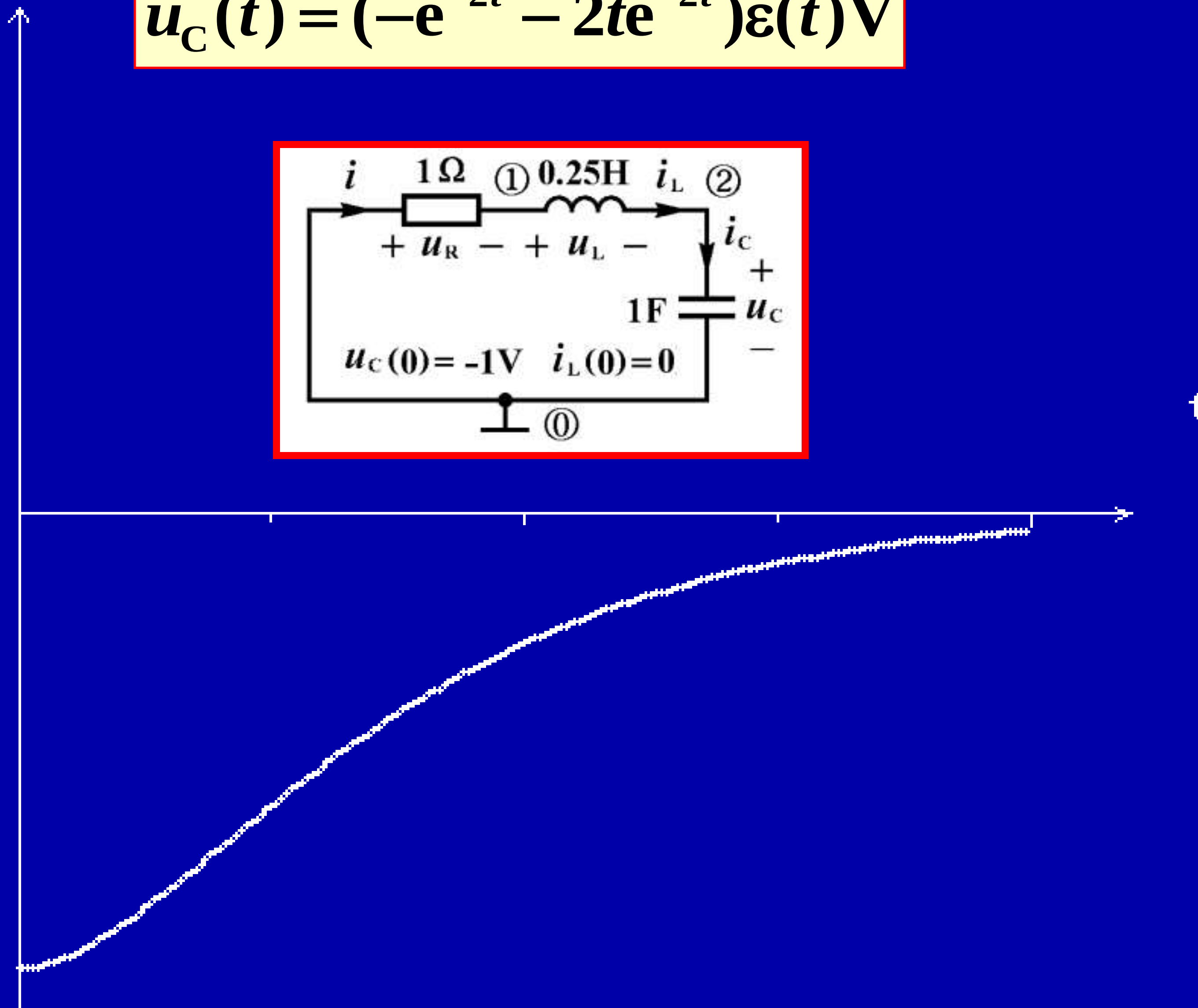
图9－3 临界阻尼情况

Press [Enter] Key to Continue

```
u3 (t) =   .000     δ(t)
       + ε(t)*t*( -2.00    +j  .000     )*exp( -2.00    +j  .000     )t
       + ε(t)*  ( -1.00    +j  .000     )*exp( -2.00    +j  .000     )t
```

$$u_C(t) = (-e^{-2t} - 2te^{-2t})\varepsilon(t)\mathrm{V}$$

电容电压的零输入响应波形

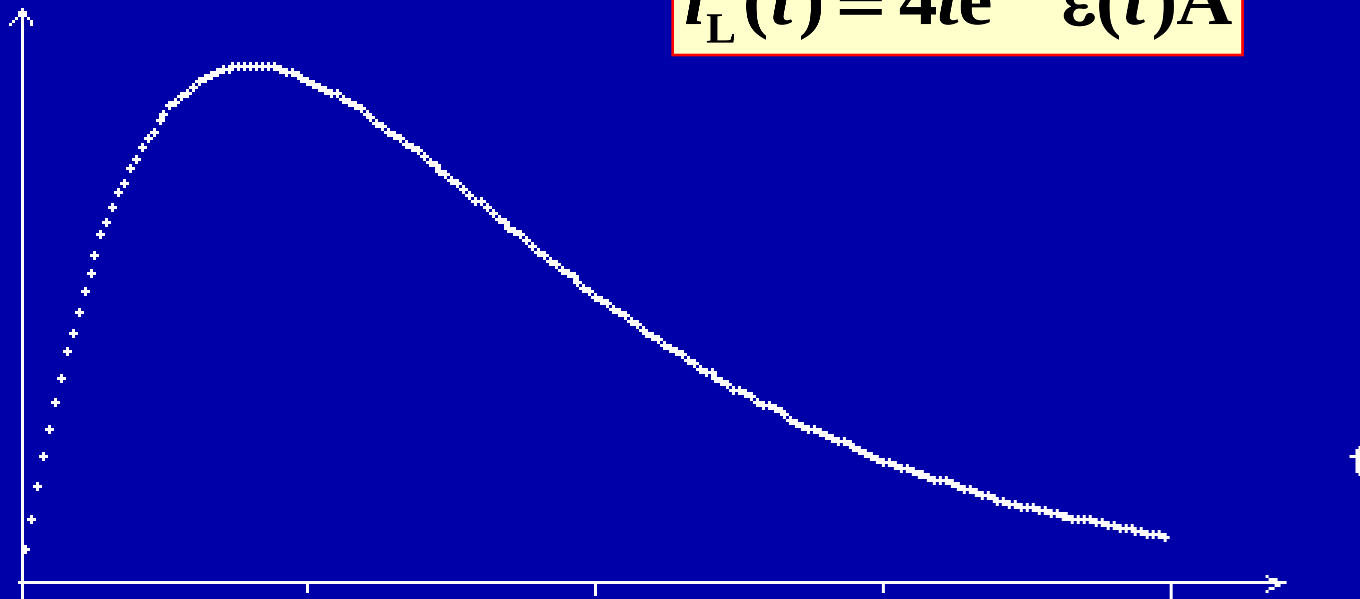


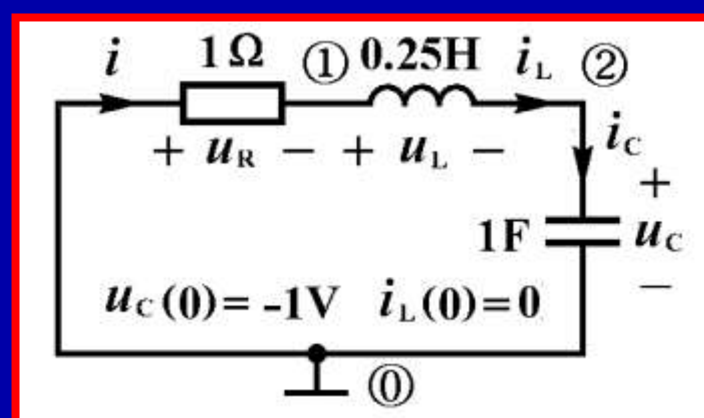
Press [Enter] Key to Continue

```
iZ (t) =   .000     δ(t)
        + ε(t)*t*(  4.00      +j  .000      )*exp( -2.00     +j  .000     )t
        + ε(t)*  (   .000     +j  .000      )*exp( -2.00     +j  .000     )t
```

$$i_L(t) = 4te^{-2t}\varepsilon(t)\,\text{A}$$

电感电流的零输入响应波形



# 四、欠阻尼情况

当 $R<2\sqrt{\dfrac{L}{C}}$ 时，电路的固有频率$s_1$，$s_2$为为两个共轭复数根，它们可以表示为

$$s_{1,2}=-\frac{R}{2L}\pm\sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2-\frac{1}{LC}}=-\alpha\pm \mathrm{j}\sqrt{\omega_0^2-\alpha^2}=-\alpha\pm \mathrm{j}\omega_{\mathrm{d}}$$

其中

$$\alpha=\frac{R}{2L}$$ 称为衰减系数

$$\omega_0=\frac{1}{\sqrt{LC}}$$ 称为谐振角频率

$$\omega_{\mathrm{d}}=\sqrt{\omega_0^2-\alpha^2}$$ 称为衰减谐振角频率

齐次微分方程的解答具有下面的形式

$$
\begin{aligned}
u_{\mathrm{C}}(t) &= \mathrm{e}^{-\alpha t}[K_1 \cos(\omega_{\mathrm{d}} t) + K_2 \sin(\omega_{\mathrm{d}} t)] \\
&= K\mathrm{e}^{-\alpha t} \cos(\omega_{\mathrm{d}} t + \varphi) \qquad (9-11)
\end{aligned}
$$

式中

$$
K = \sqrt{K_1^2 + K_2^2} \qquad \varphi = -\arctan\frac{K_2}{K_1}
$$

由初始条件$i_{\mathrm{L}}(0)$和$u_{\mathrm{C}}(0)$确定常数$K_1$，$K_2$后，得到电容电压的零输入响应，再利用KCL和VCR方程得到电感电流的零输入响应。

例9-3 电路如图9-1所示。已知$R$=6Ω, $L$=1H, $C$=0.04F, $u_C(0)$=3V，$i_L(0)$=0.28A，求电容电压和电感电流的零输入响应。

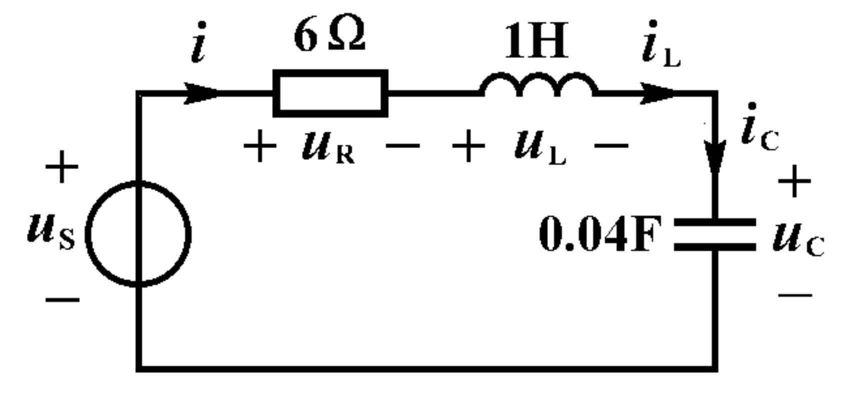



图9—1 $RLC$串联二阶电路

解：将$R$，$L$，$C$的量值代入式(9-4)计算出固有频率的数值

$$s_{1,2}=-\frac{R}{2L}\pm\sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2-\frac{1}{LC}}=-3\pm\sqrt{3^2-5^2}=-3\pm \mathrm{j}4$$

将两个不相等的固有频率 $s_1$=-3+j4 和 $s_2$=-3-j4 代入式（9－11）得到

$$u_C(t) = e^{-3t}[K_1 \cos 4t + K_2 \sin(4t)] \qquad (t \geq 0)$$

利用电容电压的初始值$u_C(0)$=3V和电感电流的初始值$i_L(0)$=0.28A得到以下两个方程

$$u_C(0) = K_1$$

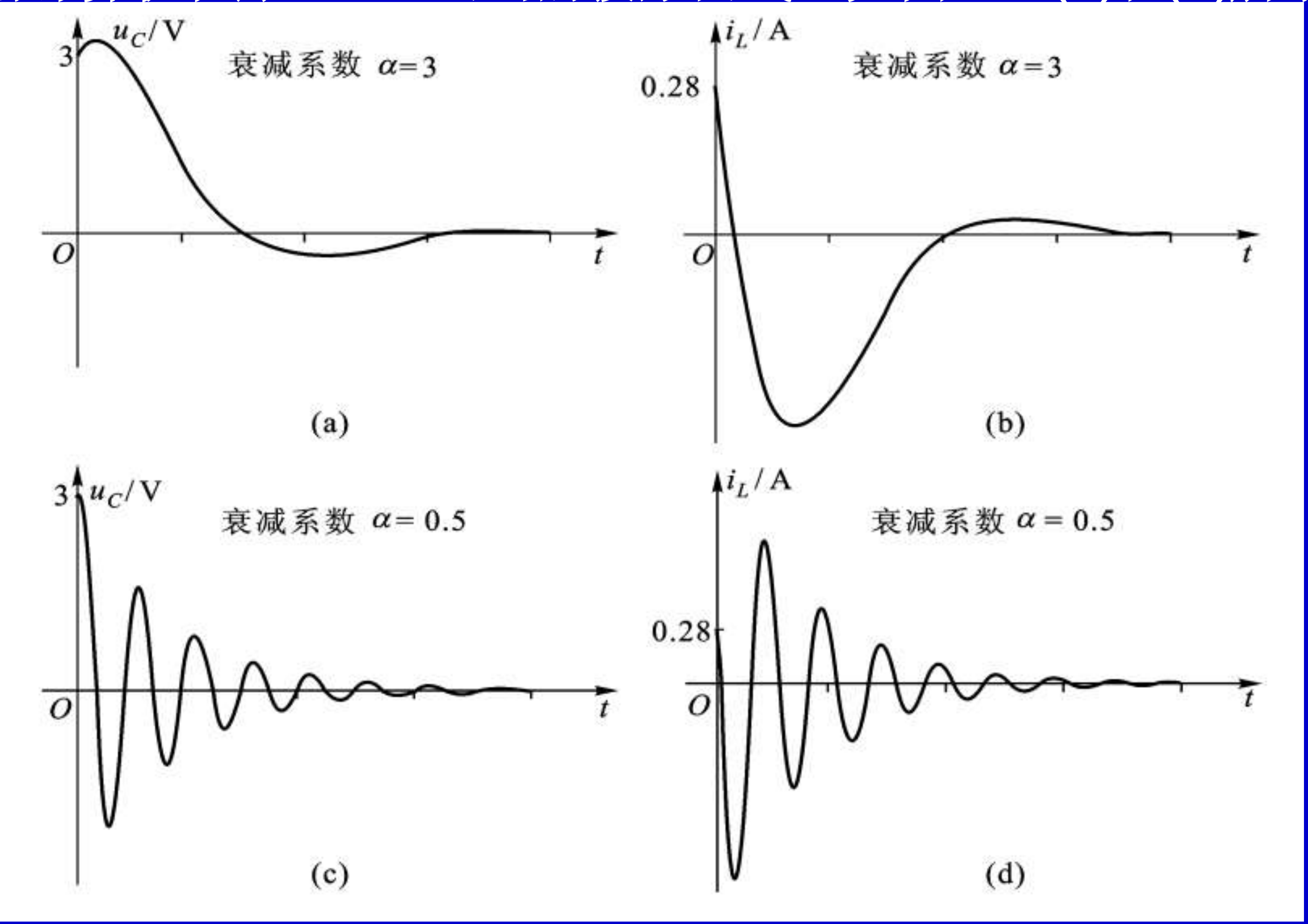
$$\left.\frac{du_C(t)}{dt}\right|_{t=0} = -3K_1 + 4K_2 = \frac{i_L(0)}{C} = 7$$

求解以上两个方程得到常数$K_1$=3和$K_2$=4，得到电容电压和电感电流的零输入响应:

$$u_c(t) = e^{-3t}[3\cos 4t + 4\sin(4t)] = 5e^{-3t}\cos(4t - 53.1^\circ)\text{V} \qquad (t \geq 0)$$

$$i_L(t) = C\frac{du_c}{dt} = 0.04e^{-3t}[7\cos(4t) - 24\sin(4t)] = e^{-3t}\cos(4t + 73.74^\circ)\text{A} \quad (t \geq 0)$$

用计算机程序DNAP画出的波形曲线，如图9－4(a)和(b)所示




**(a) 衰减系数为3的电容电压的波形　　(b) 衰减系数为3的电感电流的波形**

**(c) 衰减系数为0.5的电容电压的波形　　(d) 衰减系数为0.5的电感电流的波形**

**图9－4 欠阻尼情况**

从式(9-11)和图9-4波形曲线可以看出，欠阻尼情况的特点是能量在电容与电感之间交换，形成衰减振荡。电阻越小，单位时间消耗能量越少，曲线衰减越慢。

当例9－3中电阻由$R$=6Ω减小到$R$=1Ω，衰减系数由3变为0.5时，用计算机程序DNAP得到的电容电压和电感电流的波形曲线，如图9－4(c)和(d)所示，由此可以看出曲线衰减明显变慢。假如电阻等于零，使衰减系数为零时，电容电压和电感电流将形成无衰减的等幅振荡。

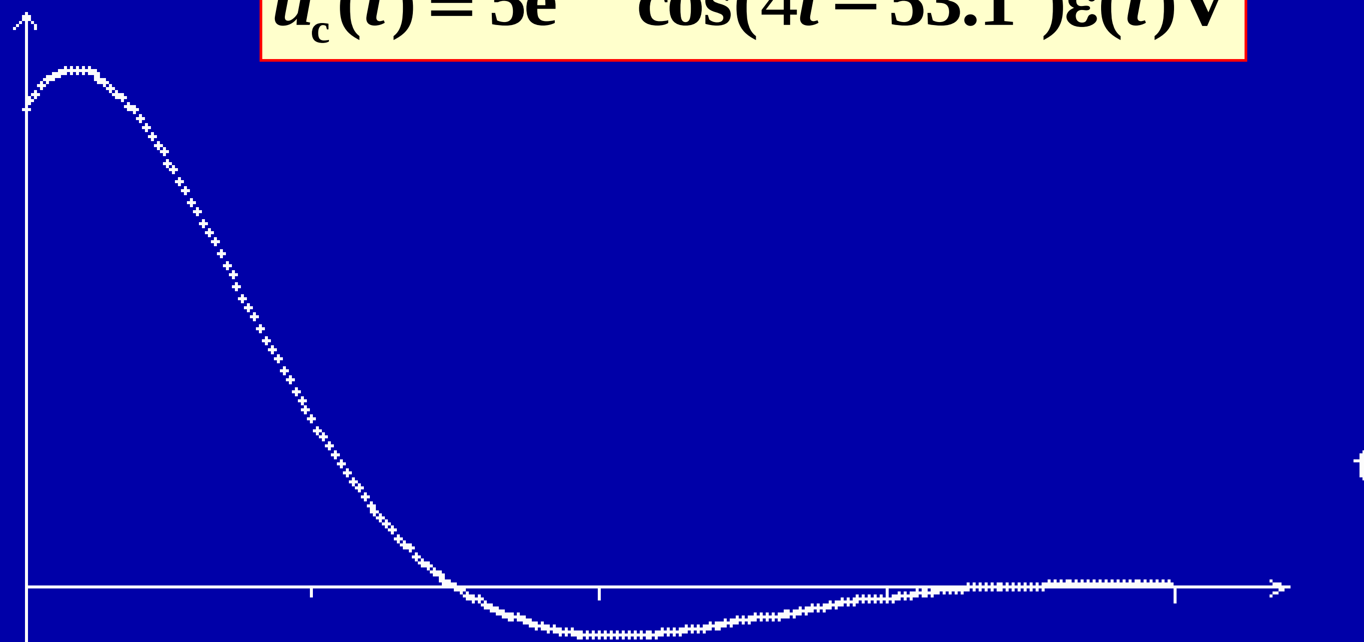
Press [Enter] Key to Continue

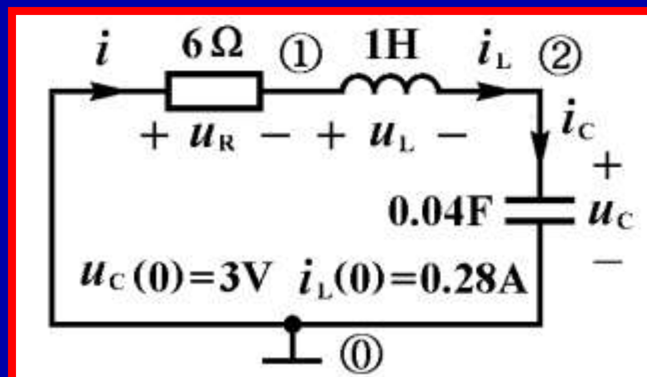
u3 (t) = .000 δ(t)

u3 (t) = ε ( t)*[( 5.00 )* exp ( -3.00 t)]cos( 4.00 t -53.13 )

$$u_c(t)=5e^{-3t}\cos(4t-53.1^\circ)\varepsilon(t)\text{V}$$

电容电压的零输入响应波形



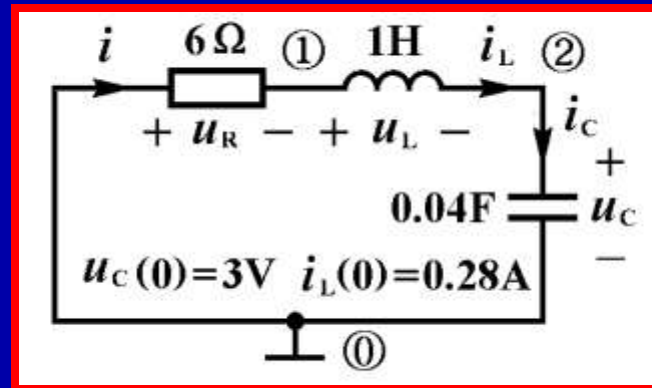



Press [Enter] Key to Continue

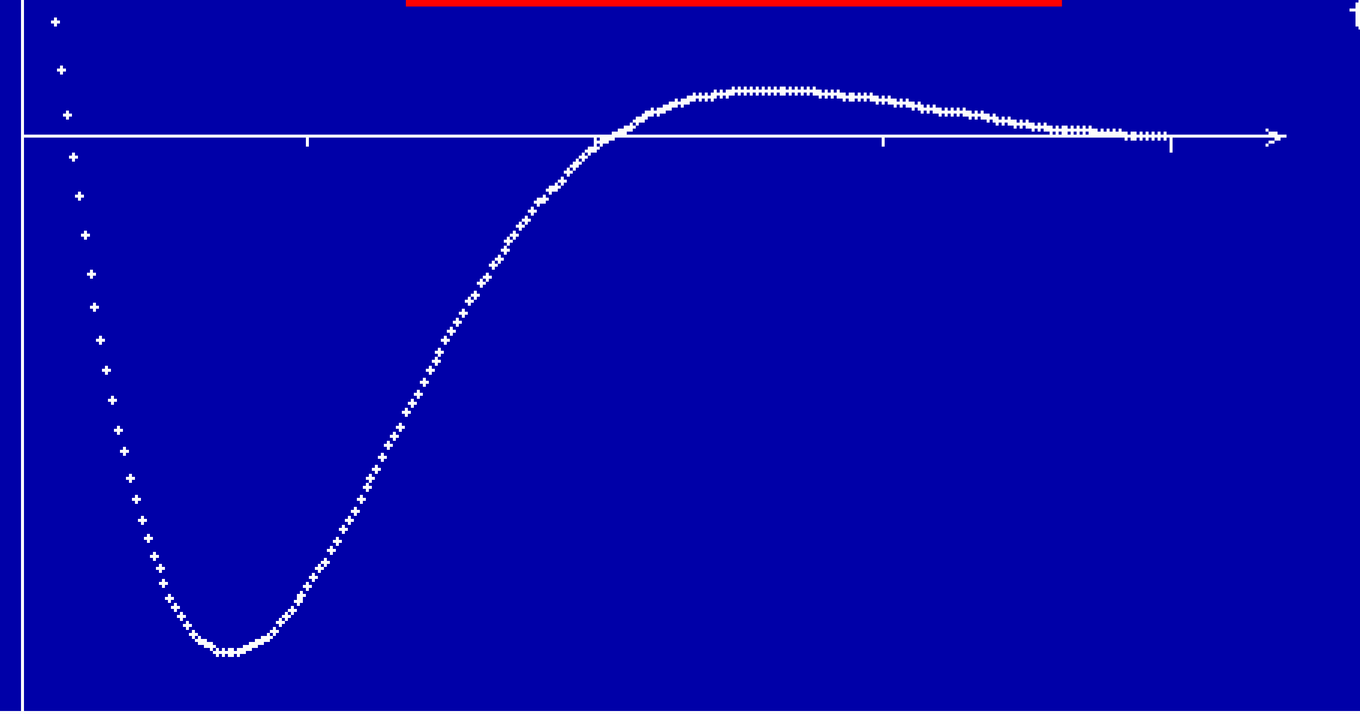
i2 (t) = .000 δ(t)

i2 (t) =ε ( t)*[( 1.00 )* exp ( -3.00 t)]cos( 4.00 t +73.74 )

$$i_{L}(t)=e^{-3t}\cos(4t+73.74^{\circ})\varepsilon(t)\mathrm{A}$$




电感电流的零输入响应波形



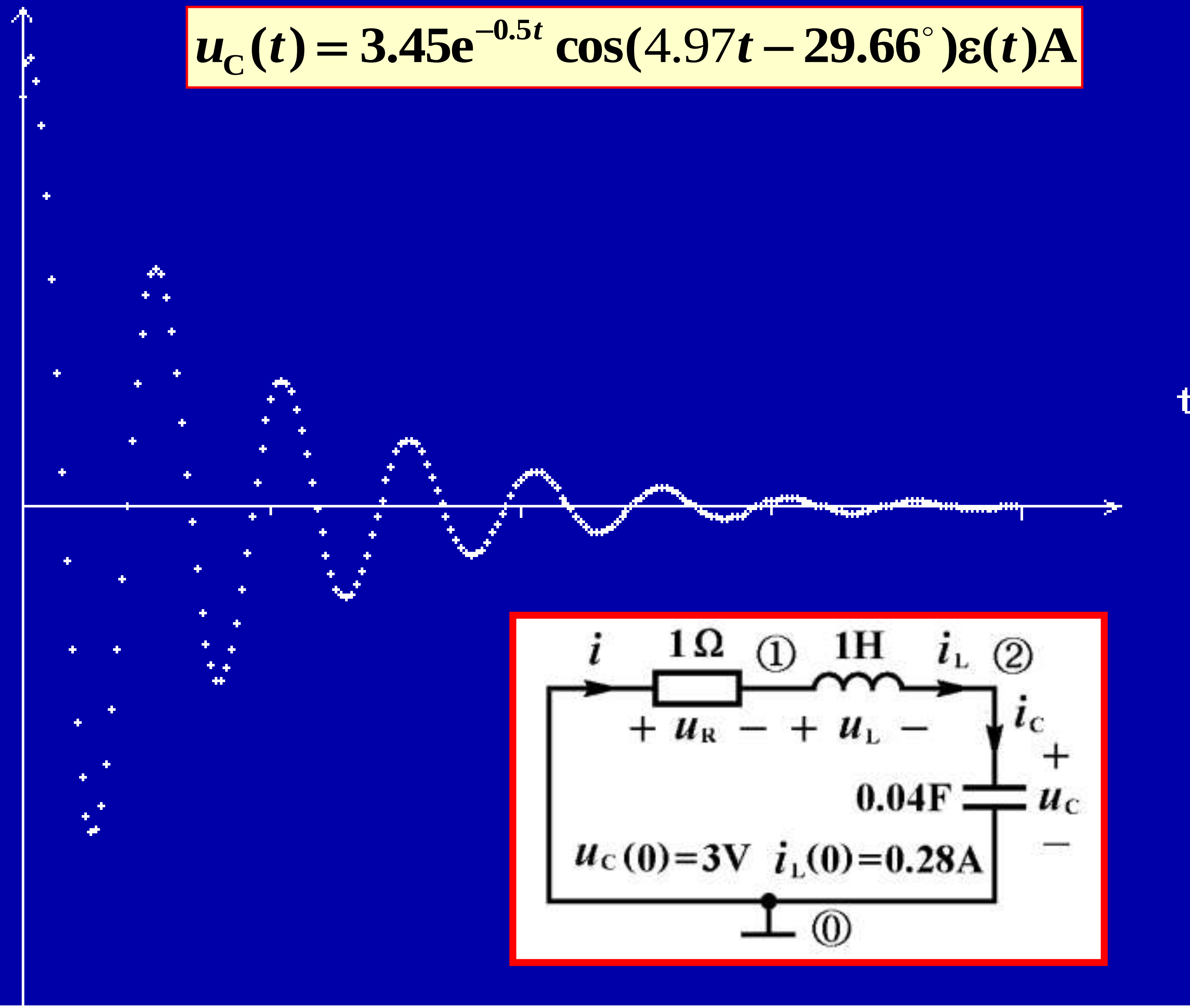
Press [Enter] Key to Continue

```
u3 (t) =   .000     δ(t)
         + ε(t)*  (   1.50     +j   .854     )*exp( -.500    +j -4.97    )t
         + ε(t)*  (   1.50     +j -.854     )*exp( -.500    +j  4.97    )t
```

u3 (t) = ε (t)*[( 3.45 )* exp ( -.500 t)]cos( 4.97 t -29.66 )

$$u_C(t) = 3.45e^{-0.5t}\cos(4.97t - 29.66^\circ)\varepsilon(t)\mathrm{A}$$

电容电压的零输入响应波形

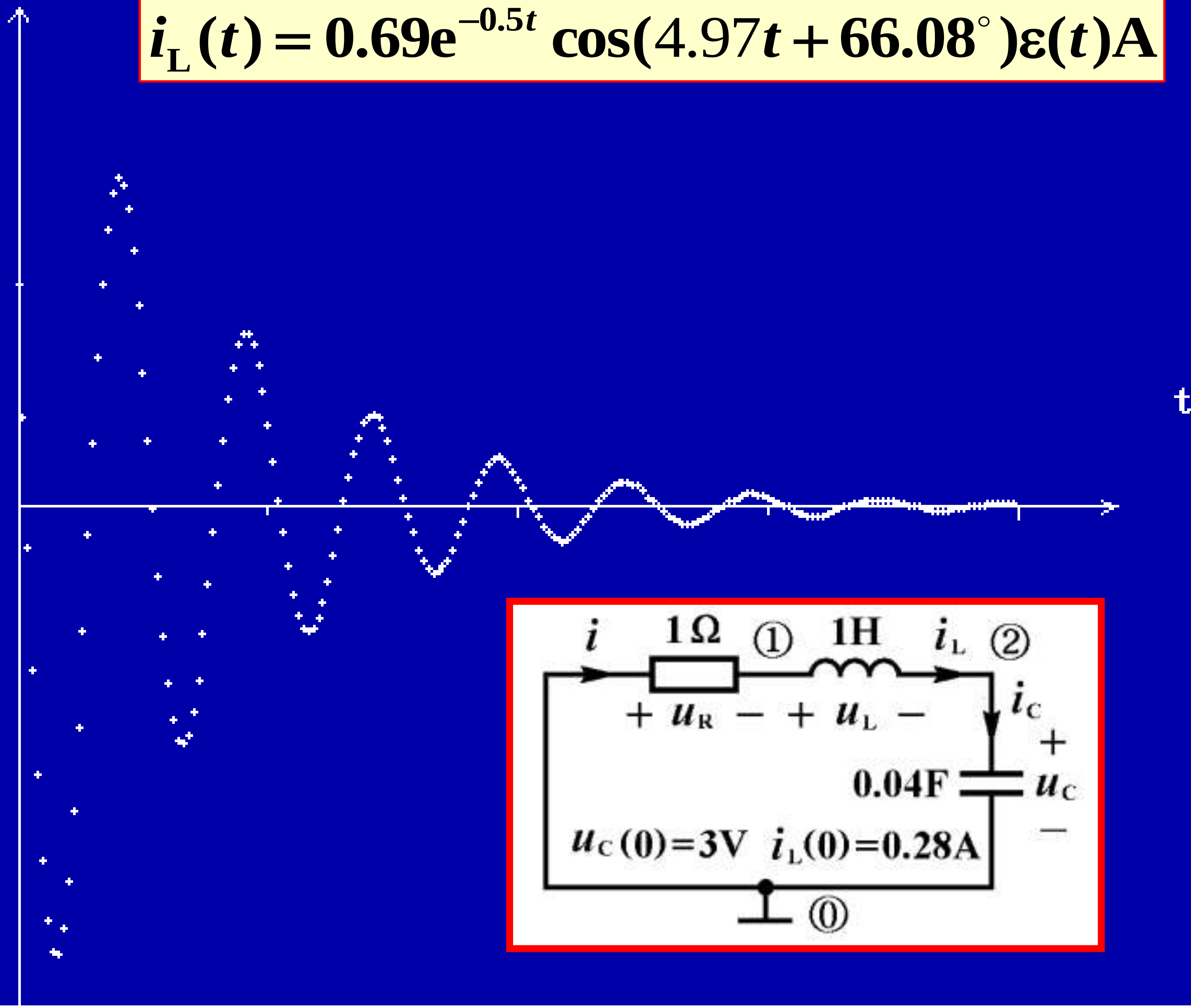


Press [Enter] Key to Continue

```
i2 (t) =   .000     δ(t)
       + ε(t)*  (   .140    +j -.316    )*exp( -.500    +j -4.97    )t
       + ε(t)*  (   .140    +j  .316    )*exp( -.500    +j  4.97    )t
i2 (t) =ε ( t)*[(  .690    )* exp ( -.500    t)]cos(  4.97    t +66.08 )
```

$$i_L(t) = 0.69e^{-0.5t}\cos(4.97t + 66.08^\circ)\varepsilon(t)\text{A}$$

电感电流的零输入响应波形



例9-4  电路如图9-1所示。已知$R$=0, $L$=1H, $C$=0.04F, $u_C(0)$=3V, $i_L(0)$=0.28A，求电容电压和电感电流的零输入响应。

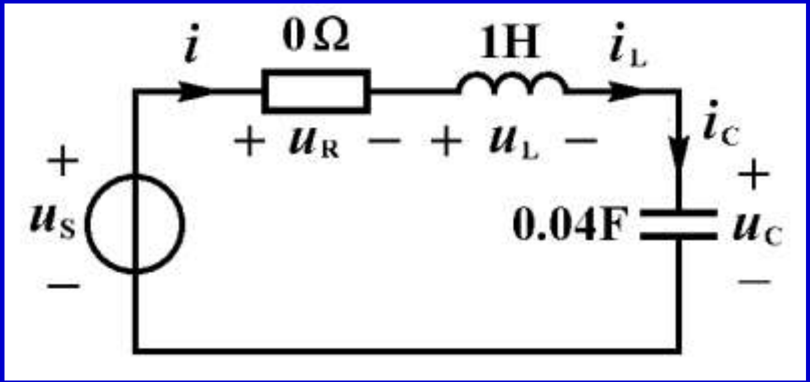



图9－1 *RLC*串联二阶电路

解：将$R$，$L$，$C$的量值代入式（9－4）计算出固有频率的数值

$$s_{1,2}=-\frac{R}{2L}\pm\sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2-\frac{1}{LC}}=\pm\sqrt{-5^2}=\pm \mathrm{j}5$$

将两个不相等的固有频率$s_1$=j5和$s_2$=-j5代入式（9-11）得到

$$u_c(t)=[K_1\cos(5t)+K_2\sin(5t)] \qquad (t\geq 0)$$

利用电容电压的初始值$u_C(0)$=3V和电感电流的初始值$i_L(0)$=0.28A 得到以下两个方程

$$u_C(0)=K_1=3$$

$$\frac{\mathrm{d}u_C(t)}{\mathrm{d}t}\bigg|_{t=0}=5K_2=\frac{i_L(0)}{C}=7$$

求解以上两个方程得到常数$K_1$=3和$K_2$=1.4，得到电容电压和电感电流的零输入响应:

$$u_C(t)=[3\cos(5t)+1.4\sin(5t)]=3.31\cos(5t-25^\circ)\mathrm{V} \qquad (t\geq 0)$$

$$i_L(t)=C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}=0.04[-15\sin(5t)+7\cos(5t)]=0.66\cos(5t+65^\circ)\mathrm{A} \qquad (t\geq 0)$$

用计算机程序DNAP画出的电容电压和电感电流的波形曲线，如图9－5所示。

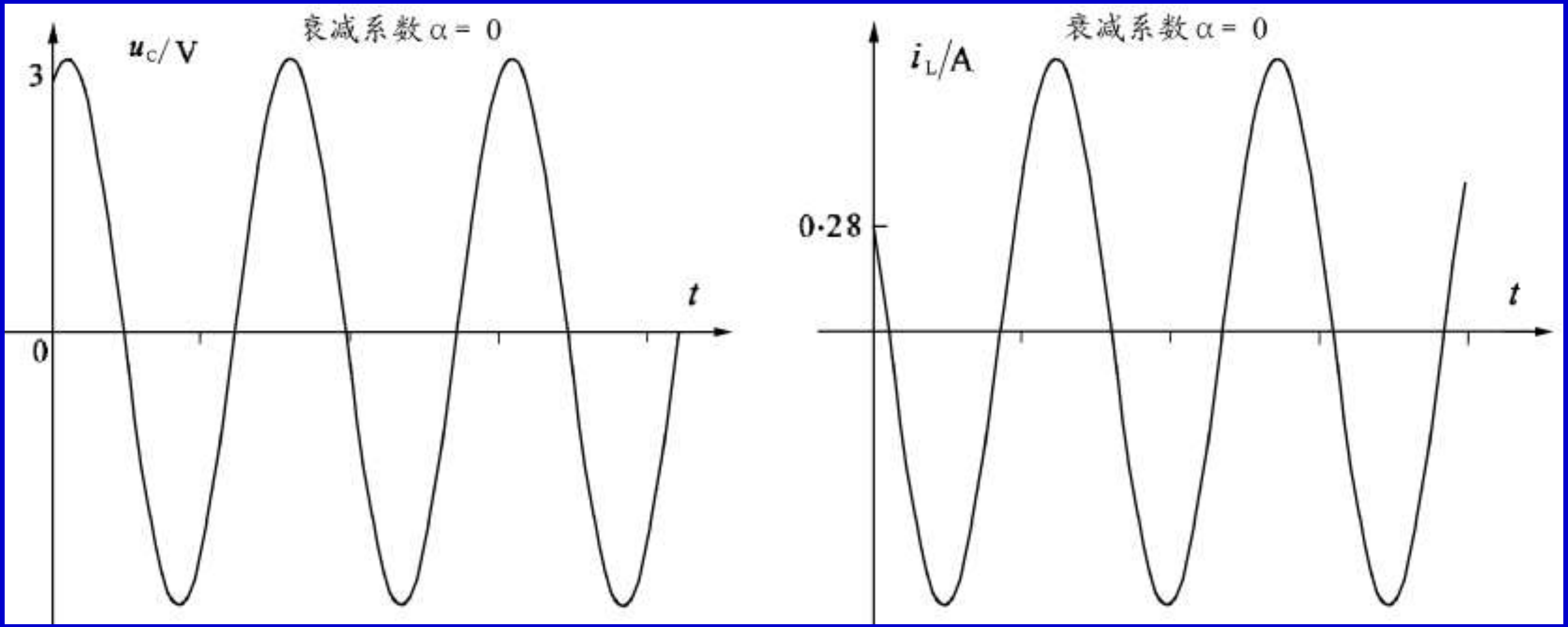



图9－5 无阻尼情况

Press [Enter] Key to Continue

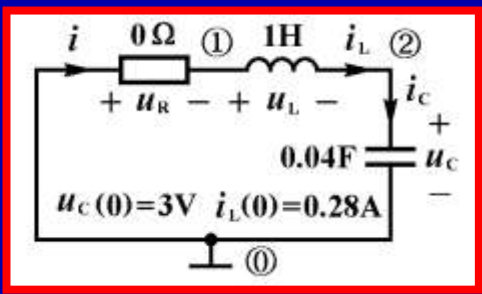
u3 (t) = .000 δ(t)

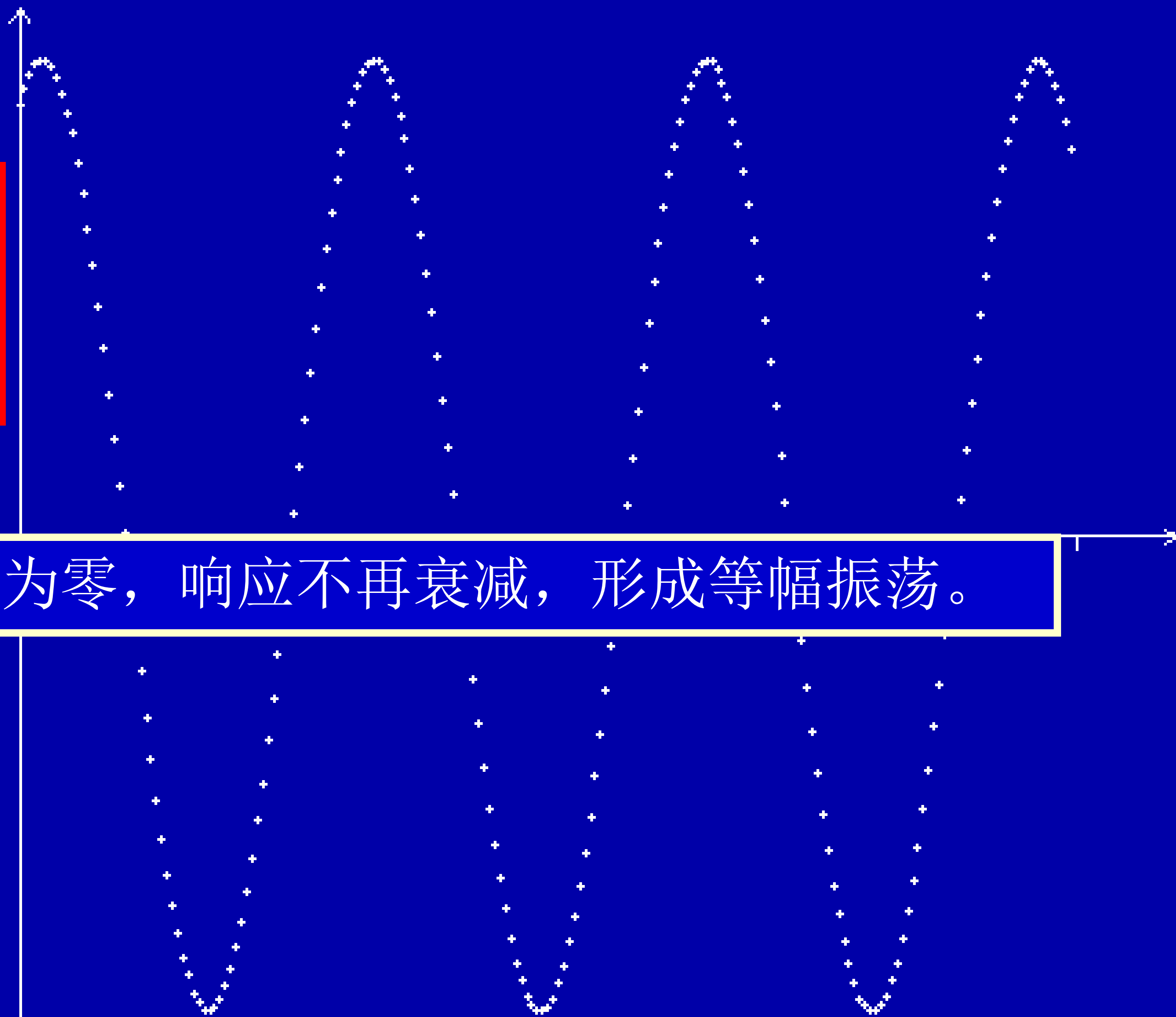
+ ε(t)* ( )t

+ ε(t)* ( )t

$$u_C(t) = 3.31\cos(5t - 25^\circ)\varepsilon(t)\mathrm{V}$$

u3 (t) =ε (t)*[( 3.31 )* exp ( .000 t)]cos( 5.00 t -25.02 )




电阻为零，响应不再衰减，形成等幅振荡。

Press [Enter] Key to Continue

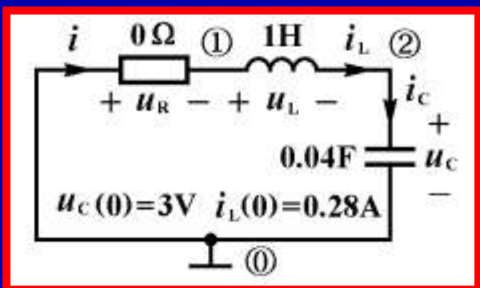
i3 (t) = .000 δ(t)

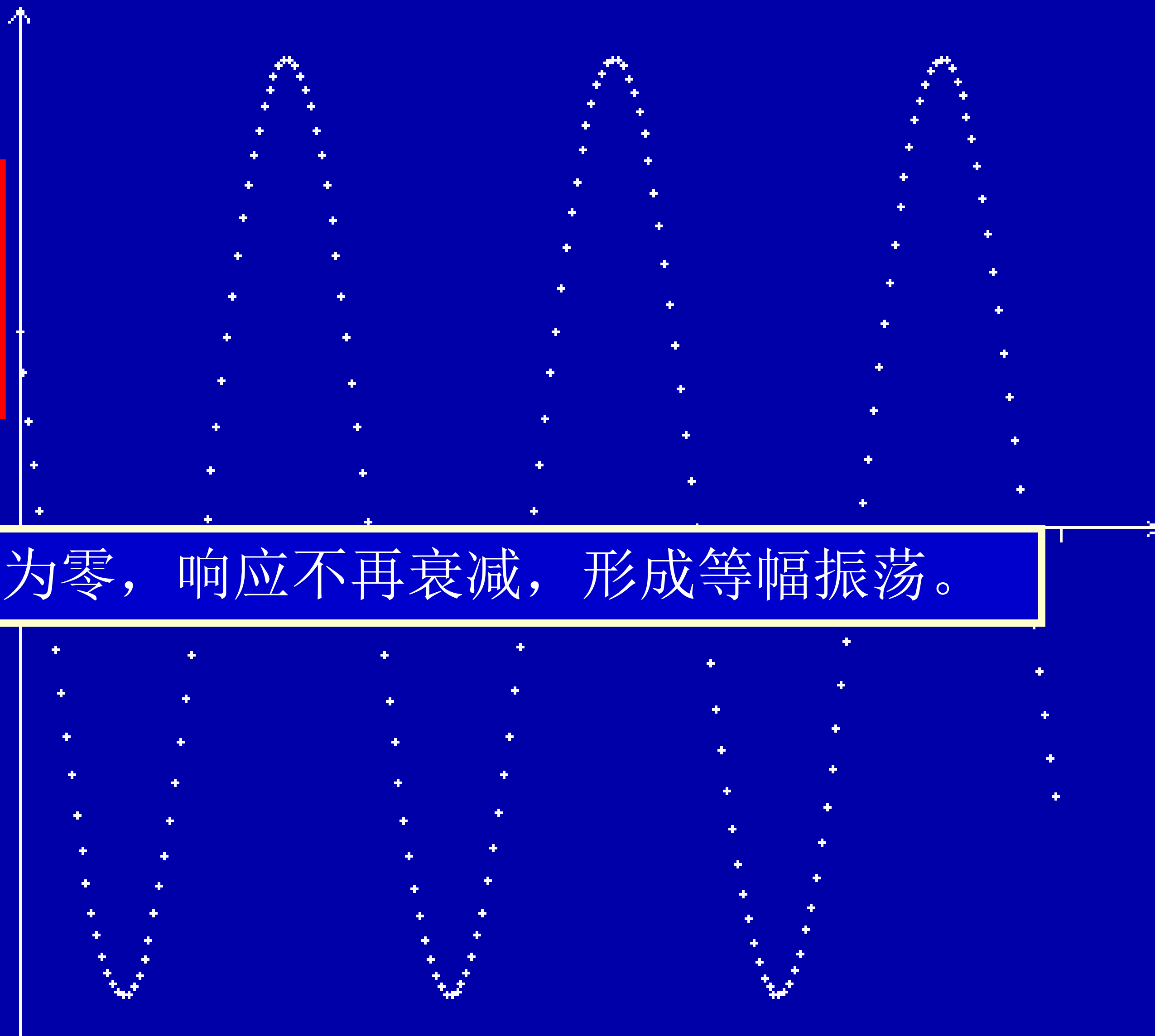
+ ε(t)* )t

+ ε(t)* )t

$$i_{\mathrm{L}}(t)=0.66\cos(5t+65^{\circ})\varepsilon(t)\mathrm{A}$$

i2 (t) = ε (t)*[( .662 )* exp ( .000 t)]cos( 5.00 t +64.98 )



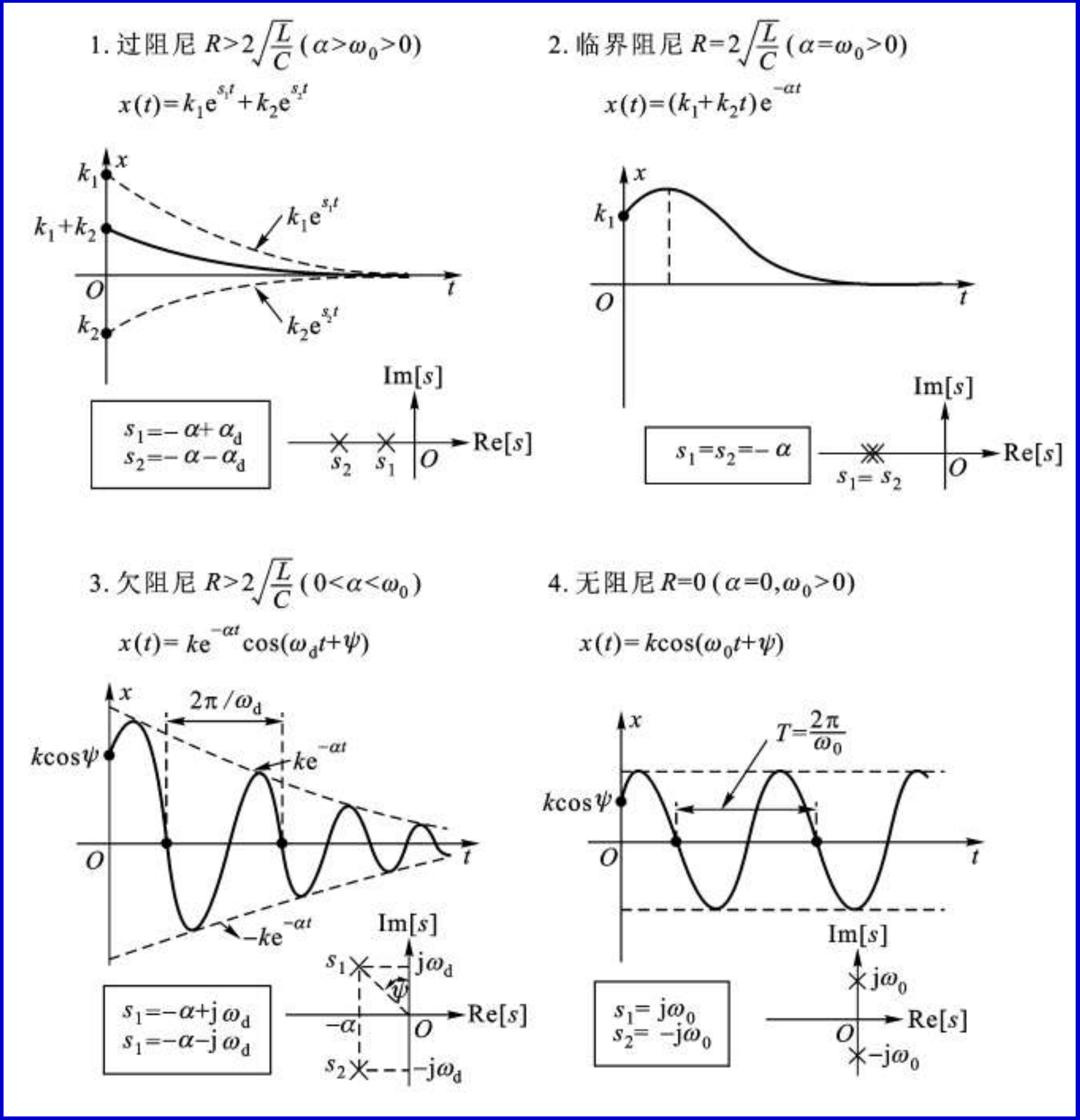




电阻为零，响应不再衰减，形成等幅振荡。

从电容电压和电感电流的表达式和波形曲线可见，由于电路中没有损耗，能量在电容和电感之间交换，总能量不会减少，形成等振幅振荡。电容电压和电感电流的相位差为90°，当电容电压为零，电场储能为零时，电感电流达到最大值，全部能量储存于磁场中；而当电感电流为零，磁场储能为零时，电容电压达到最大值，全部能量储存于电场中。

从以上分析计算的结果可以看出，*RLC*二阶电路的零输入响应的形式与其固有频率密切相关，我们将响应的几种情况画在图9－6上。

**图9-6**



1. 过阻尼 $R>2\sqrt{\frac{L}{C}}\ (\alpha>\omega_0>0)$
$x(t)=k_1e^{s_1t}+k_2e^{s_2t}$
$x$
$k_1$
$k_1+k_2$
$k_1e^{s_1t}$
$O$
$t$
$k_2$
$k_2e^{s_2t}$
Im[$s$]
$s_1=-\alpha+\alpha_d$
$s_2=-\alpha-\alpha_d$
$s_2$ $s_1$ $O$ Re[$s$]
2. 临界阻尼 $R=2\sqrt{\frac{L}{C}}\ (\alpha=\omega_0>0)$
$x(t)=(k_1+k_2t)e^{-\alpha t}$
$x$
$k_1$
$O$
$t$
Im[$s$]
$s_1=s_2=-\alpha$
$s_1=s_2$ $O$ Re[$s$]
3. 欠阻尼 $R>2\sqrt{\frac{L}{C}}\ (0<\alpha<\omega_0)$
$x(t)=ke^{-\alpha t}\cos(\omega_d t+\psi)$
$x$
$2\pi/\omega_d$
$k\cos\psi$
$ke^{-\alpha t}$
$O$
$t$
$-ke^{-\alpha t}$
Im[$s$]
$s_1$ $j\omega_d$
$\psi$
$-\alpha$ $O$ Re[$s$]
$s_2$ $-j\omega_d$
$s_1=-\alpha+j\omega_d$
$s_1=-\alpha-j\omega_d$
4. 无阻尼 $R=0\ (\alpha=0,\omega_0>0)$
$x(t)=k\cos(\omega_0 t+\psi)$
$x$
$T=\frac{2\pi}{\omega_0}$
$k\cos\psi$
$O$
$t$
Im[$s$]
$j\omega_0$
$O$ Re[$s$]
$-j\omega_0$
$s_1=j\omega_0$
$s_2=-j\omega_0$

由图9—6可见：

1. 在过阻尼情况，$s_1$和$s_2$是不相等的负实数，固有频率出现在$s$平面上负实轴上，响应按指数规律衰减。

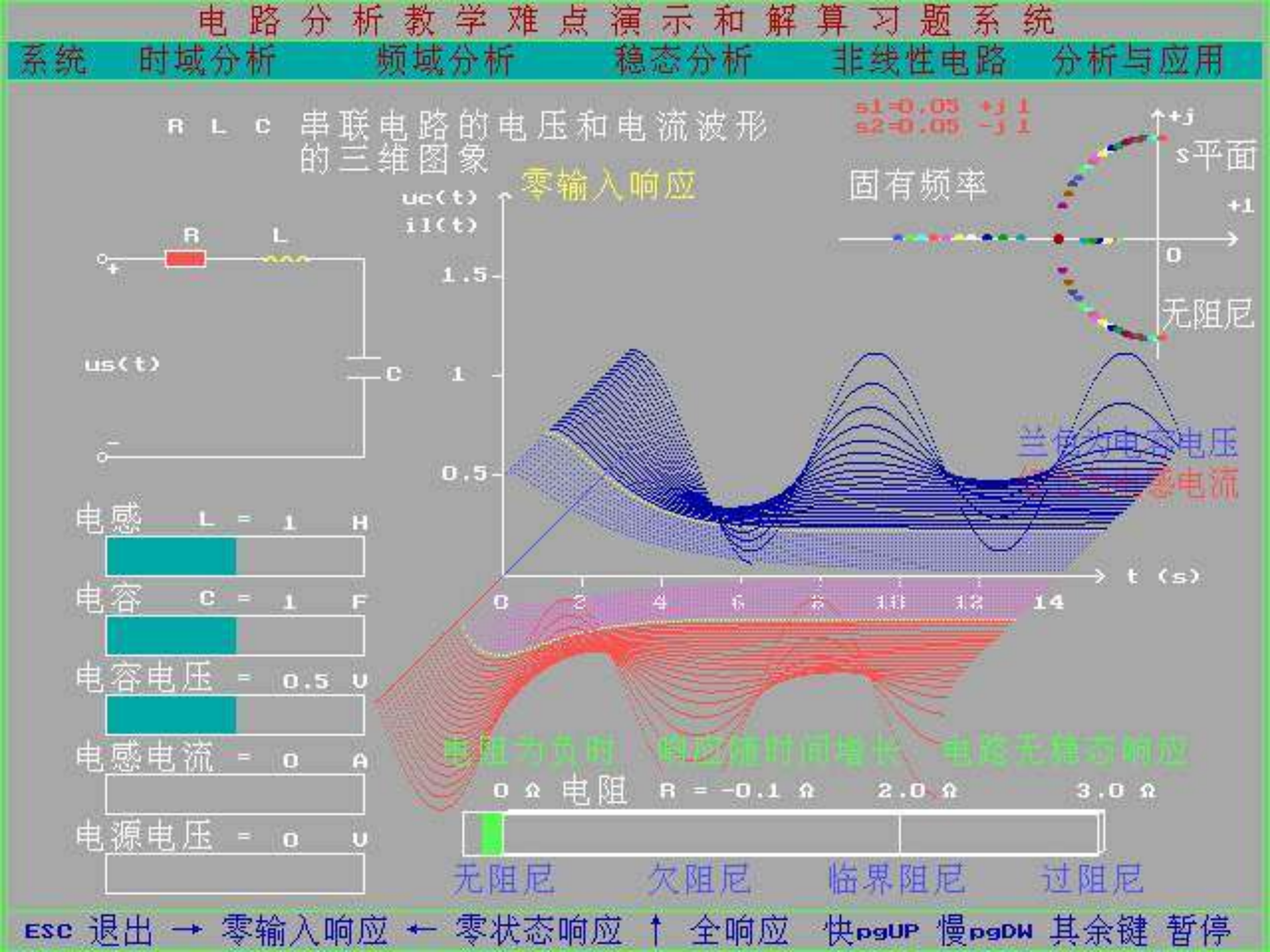
2.在临界阻尼情况，$s_1=s_2$是相等的负实数，固有频率出现在$s$平面上负实轴上，响应按指数规律衰减。

3.在欠阻尼情况，$s_1$和$s_2$是共轭复数，固有频率出现在$s$平面上的左半平面上，响应是振幅随时间衰减的正弦振荡，其振幅随时间按指数规律衰减，衰减系数 $\alpha$ 越大，衰减越快。衰减振荡的角频率$\omega_d$ 越大，振荡周期越小，振荡越快。

图中按$Ke^{-\alpha t}$画出的虚线称为包络线，它限定了振幅的变化范围。

4.在无阻尼情况，$s_1$和$s_2$是共轭虚数，固有频率出现在$s$平面上的虚轴上，衰减系数为零，振幅不再衰减，形成角频率为$\omega_0$的等幅振荡。

显然，当固有频率的实部为正时，响应的振幅将随时间增加，电路是不稳定的。由此可知，当一个电路的全部固有频率均处于$s$平面上的左半平面上时，电路是稳定的。



电路分析教学难点演示和解算习题系统
系统 时域分析 频域分析 稳态分析 非线性电路 分析与应用
R L C 串联电路的电压和电流波形
的三维图象
零输入响应
s1=0.05 +j 1
s2=0.05 -j 1
+j
s平面
固有频率
+1
0
无阻尼
uc(t)
il(t)
1.5
1
0.5
R
L
us(t)
C
t (s)
0 2 4 6 8 10 12 14
兰色为电容电压
红色为电感电流
电感 L = 1 H
电容 C = 1 F
电容电压 = 0.5 V
电感电流 = 0 A
电源电压 = 0 V
电阻为负时 响应随时间增长 电路无稳态响应
0 Ω 电阻 R = -0.1 Ω 2.0 Ω 3.0 Ω
无阻尼 欠阻尼 临界阻尼 过阻尼
ESC 退出 → 零输入响应 ← 零状态响应 ↑ 全响应 快pgUP 慢pgDW 其余键 暂停

# RLC串联电路响应

胡翔骏制作

高等教育出版社

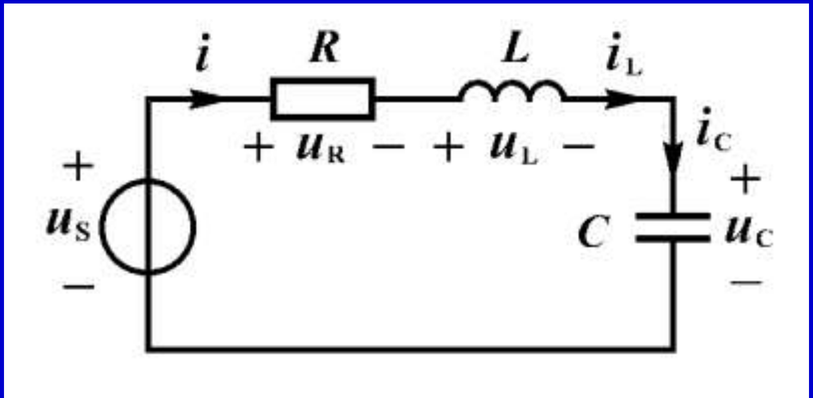
在幻灯片放映时，请用鼠标单击图片放映录像。

根据教学需要，用鼠标点击名称的方法放映相关录像。

| | 名　称 | 时间 |
| --- | --- | --- |
| 1 | *RLC*串联电路响应 | **1:49** |
| 2 | *RLC*串联电路的阶跃响应 | **2:22** |
| 3 | 回转器电感应用 | **2:59** |
| 4 | 电阻器和电感器串联电路响应 | **3:08** |


郁金香

# §9—2 直流激励下*RLC*串联电路的响应




对于图示直流激励的*RLC*串联电路，当$u_S(t)=U_S$时，可以得到以下非齐次微分方程

$$LC\frac{d^2u_C}{dt^2}+RC\frac{du_C}{dt}+u_C=U_S \qquad (t\geq 0)$$

电路的全响应由对应齐次微分方程的通解与微分方程的特解之和组成

$$u_C(t) = u_{Ch}(t) + u_{Cp}(t)$$

电路的固有频率为

$$s_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}}$$

当电路的固有频率$s_1 \neq s_2$时，对应齐次微分方程的通解为

$$u_{ch}(t) = K_1 e^{s_1 t} + K_2 e^{s_2 t}$$

微分方程的特解为

$$u_{\mathrm{cp}}(t) = U_{\mathrm{S}}$$

全响应为

$$u_{\mathrm{C}}(t) = u_{\mathrm{Ch}}(t) + u_{\mathrm{Cp}}(t) = K_1 \mathrm{e}^{s_1 t} + K_2 \mathrm{e}^{s_2 t} + U_{\mathrm{S}}$$

利用以下两个初始条件

$$u_{\mathrm{C}}(0),\quad \left.\frac{\mathrm{d}u_{\mathrm{C}}(t)}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} = \frac{i_{\mathrm{L}}(0)}{C}$$

可以得到

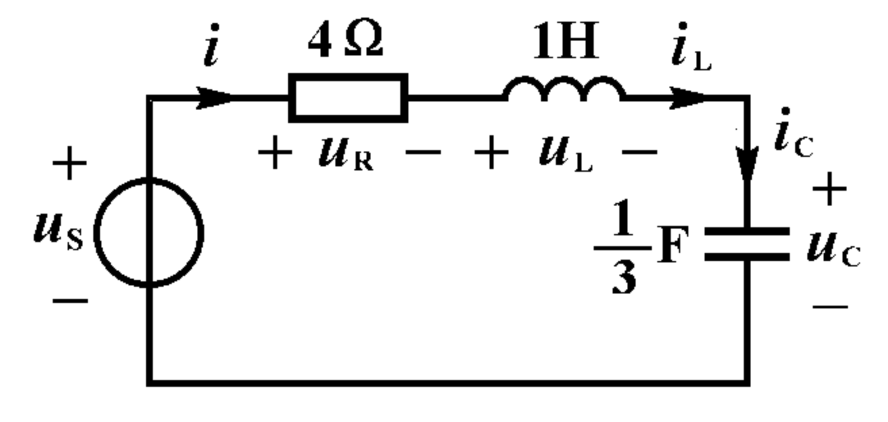
$$u_{\mathrm{C}}(0) = K_1 + K_2 + U_{\mathrm{S}}$$

对$u_C(t)$求导，再令$t$=0得到

$$\left.\frac{\mathrm{d}u_C(t)}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} = K_1 s_1 + K_2 s_2 = \frac{i_L(0)}{C}$$

求解这两个代数方程，得到常数$K_1$和$K_2$后就可得到$u_C(t)$。

例9-5　电路如图所示。已知 $R$=4Ω，$L$=1H， $C$=1/3F，$u_S(t)$=2V，$u_C(0)$=6V，$i_L(0)$=4A。求$t$>0时，电容电压和电感电流的响应。




解：先计算固有频率

$$s_{1,2}=-\frac{R}{2L}\pm\sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2-\frac{1}{LC}}=-2\pm\sqrt{4-3}=-2\pm1=\begin{cases}-1\\-3\end{cases}$$

这是两个不相等的负实根，其通解为

$$u_{ch}(t) = K_1 e^{-t} + K_2 e^{-3t}$$

特解为

$$u_{cp}(t) = 2\mathrm{V}$$

全响应为

$$u_C(t) = u_{Ch}(t) + u_{Cp}(t) = K_1 e^{-t} + K_2 e^{-3t} + 2\mathrm{V}$$

利用初始条件得到

$$u_C(0) = K_1 + K_2 + 2\mathrm{V} = 6$$

$$\left.\frac{du_C(t)}{dt}\right|_{t=0} = -K_1 - 3K_2 = \frac{i_L(0)}{C} = 12$$

联立求解以上两个方程得到

$$K_1 = 12\text{V}, K_2 = -8\text{V}$$

最后得到电容电压和电感电流的全响应

$$u_\text{C}(t) = (12\text{e}^{-t} - 8\text{e}^{-3t} + 2)\text{V} \qquad (t \geq 0)$$

$$i_\text{L}(t) = i_\text{C}(t) = C\frac{\text{d}u_\text{C}}{\text{d}t} = (-4\text{e}^{-t} + 8\text{e}^{-3t})\text{A} \qquad (t \geq 0)$$

Press [Enter] Key to Continue

u4 (t) = .000 δ(t)

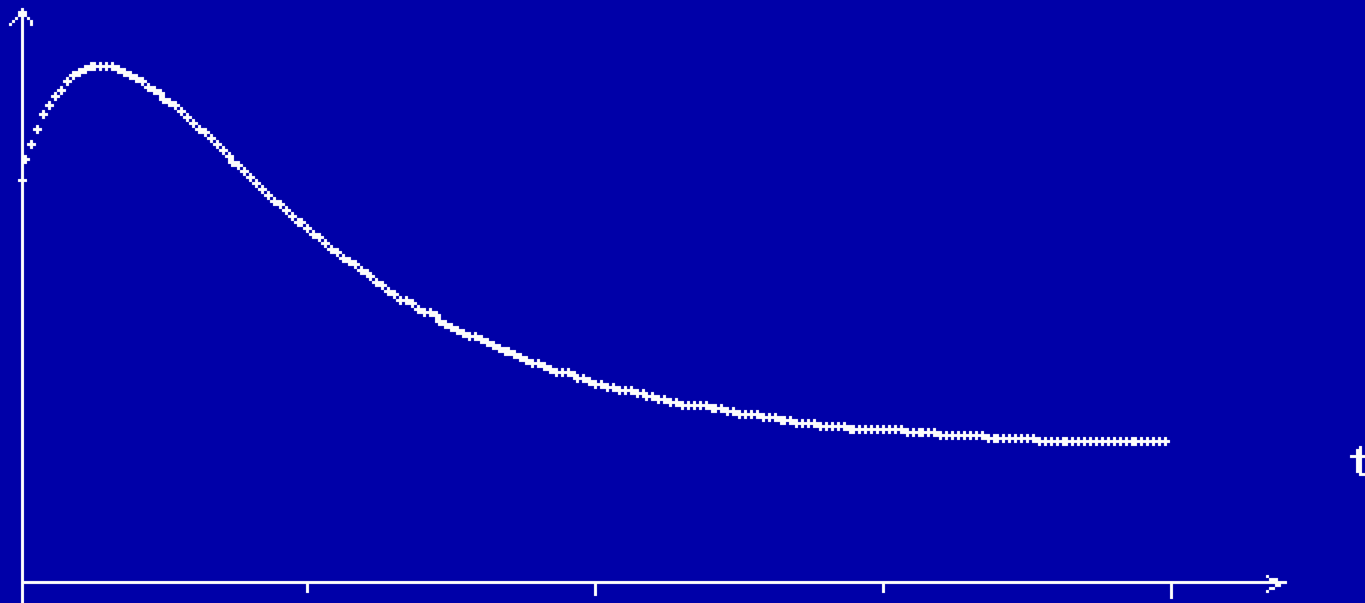
+ ε(t)* )t

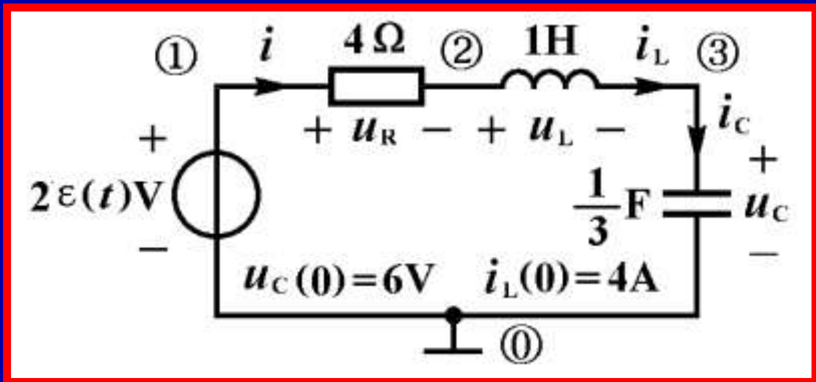
+ ε(t)* )t

+ ε(t)* )t

$$u_C(t) = (12e^{-t} - 8e^{-3t} + 2)\varepsilon(t)\text{V}$$

电容电压的波形



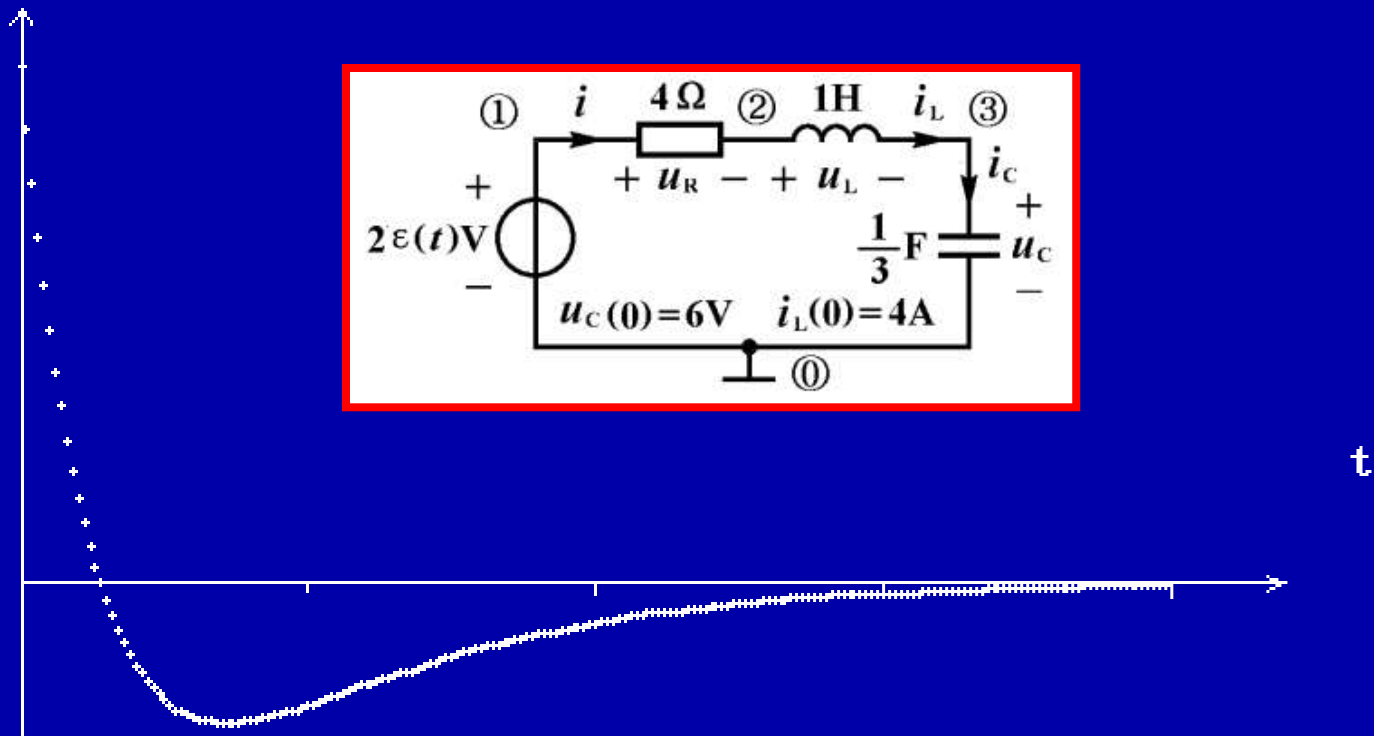
Press [Enter] Key to Continue

i3 (t) = .000 δ(t)

+ ε(t … )t

+ ε(t … )t

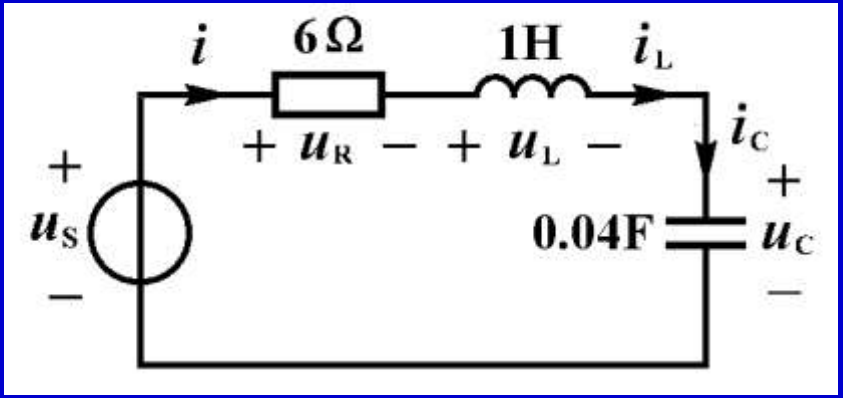
$$i_L(t)=(-4e^{-t}+8e^{-3t})\varepsilon(t)\text{A}$$




电感电流的波形

DNAP程序可画出响应波形曲线，便于读者掌握电路特性。

例9-6　电路如图所示。已知$R$=6Ω, $L$=1H, $C$=0.04F, $u_S(t)=\varepsilon(t)$V。求$t$>0时电容电压的零状态响应。




解：$t$>0时，$\varepsilon(t)$=1V，可以作为直流激励处理。首先计算电路的固有频率

$$s_{1,2}=-\frac{R}{2L}\pm\sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2-\frac{1}{LC}}=-3\pm\sqrt{3^2-5^2}=-3\pm\mathrm{j}4$$

根据这两个固有频率$s_1$=-3+j4和$s_2$=-3-j4，可以得到全响应的表达式为

$$u_C(t)=\{e^{-3t}[K_1\cos(4t)+K_2\sin(4t)]+1\}\mathrm{V} \qquad (t\geq 0)$$

利用电容电压的初始值$u_C(0)$=0和电感电流的初始值$i_L(0)$=0得到以下两个方程

$$u_C(0)=K_1+1=0$$

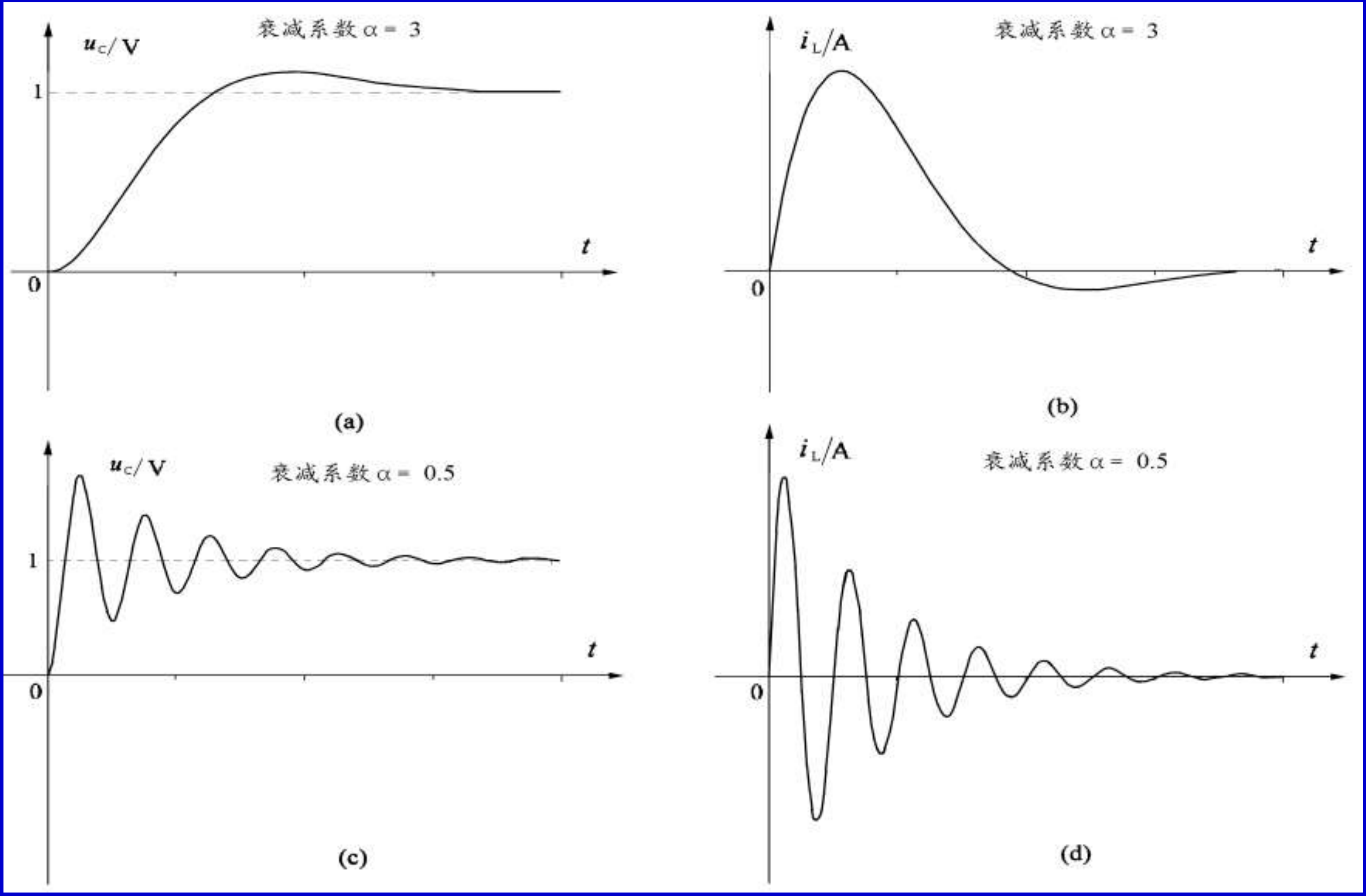
$$\left.\frac{\mathrm{d}u_C(t)}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}=-3K_1+4K_2=0$$

求解以上两个方程得到常数$K_1$＝-1和$K_2$＝-0.75，得到电容电压的零状态响应

$$u_C(t) = \{e^{-3t}[-\cos(4t) - 0.75\sin(4t)] + 1\}\text{V}$$
$$= [1.25e^{-3t}\cos(4t + 143.1^\circ) + 1]\text{V} \qquad (t \ge 0)$$

可以用计算机程序DNAP画出电容电压和电感电流零状态响应的波形。

注：图(a)和(b)表示用DNAP程序画出的电容电压和电感电流的波形。



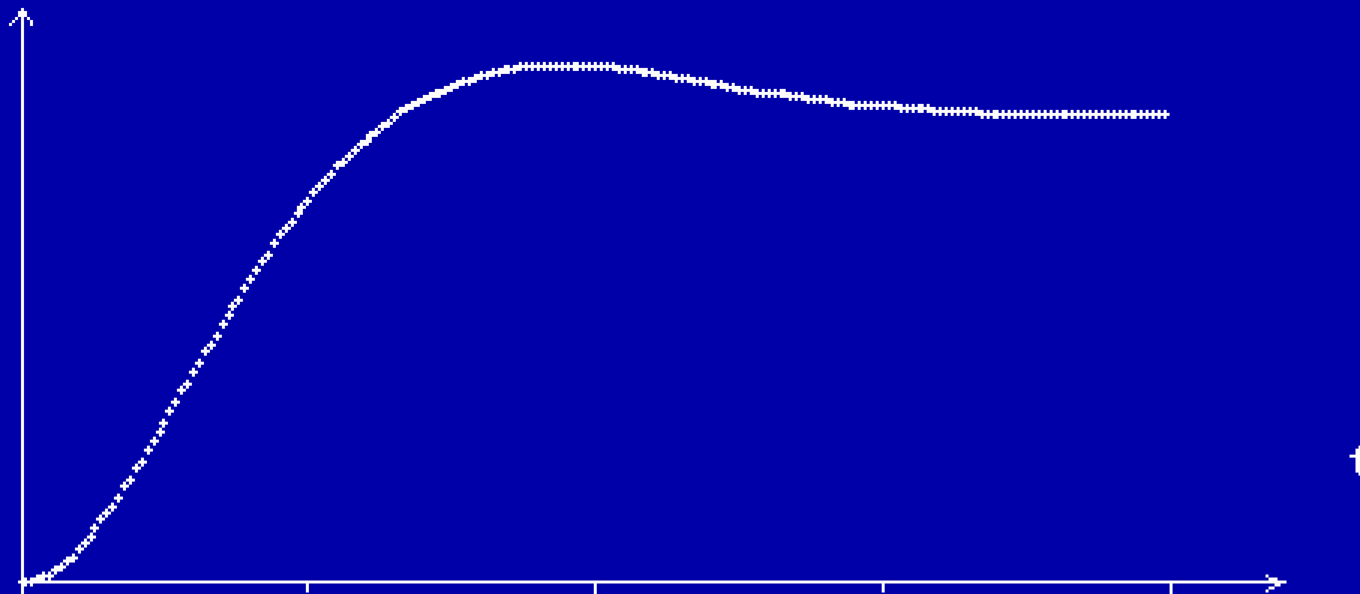

注：图(c)和(d)表示当电阻由$R$=6Ω减小到$R$=1Ω，衰减系数由3变为0.5时的电容电压和电感电流零状态响应的波形曲线。

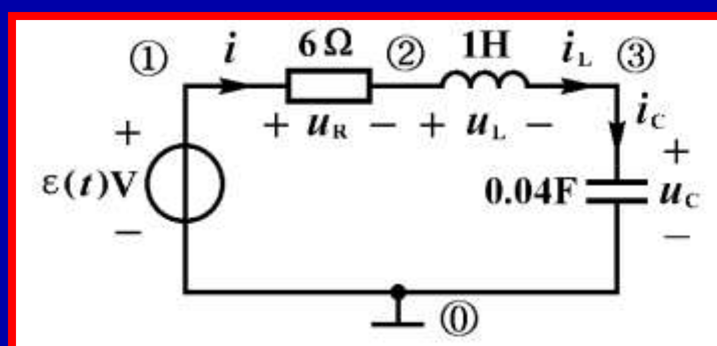
Press [Enter] Key to Continue

u4 (t) = .000 δ(t)

$$u_C(t) = [1.25e^{-3t}\cos(4t + 143.1^\circ) + 1]\varepsilon(t)\text{V}$$

电容电压的波形

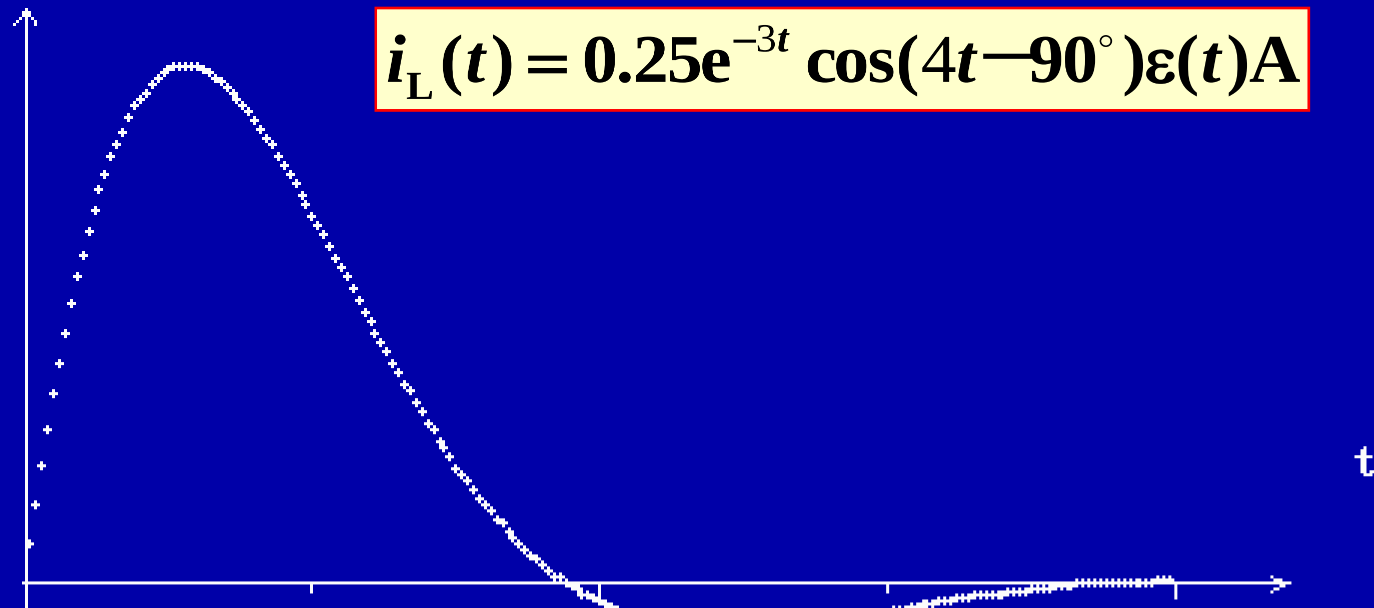


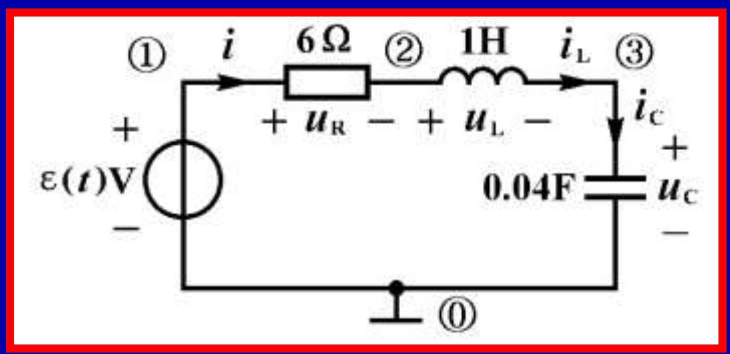



```
                         Press [Enter] Key to Continue
i3 (t) =   .000    δ(t)
       + ε(t)*  (   .000    +j  .125    )*exp( -3.00   +j -4.00   )t
       + ε(t)*  (   .000    +j -.125    )*exp( -3.00   +j  4.00   )t
i3 (t) =ε (t)*[(  .250    )* exp ( -3.00    t)]cos(  4.00    t -90.00  )
```

$$i_L(t) = 0.25e^{-3t}\cos(4t-90^\circ)\varepsilon(t)\text{A}$$

电感电流的波形



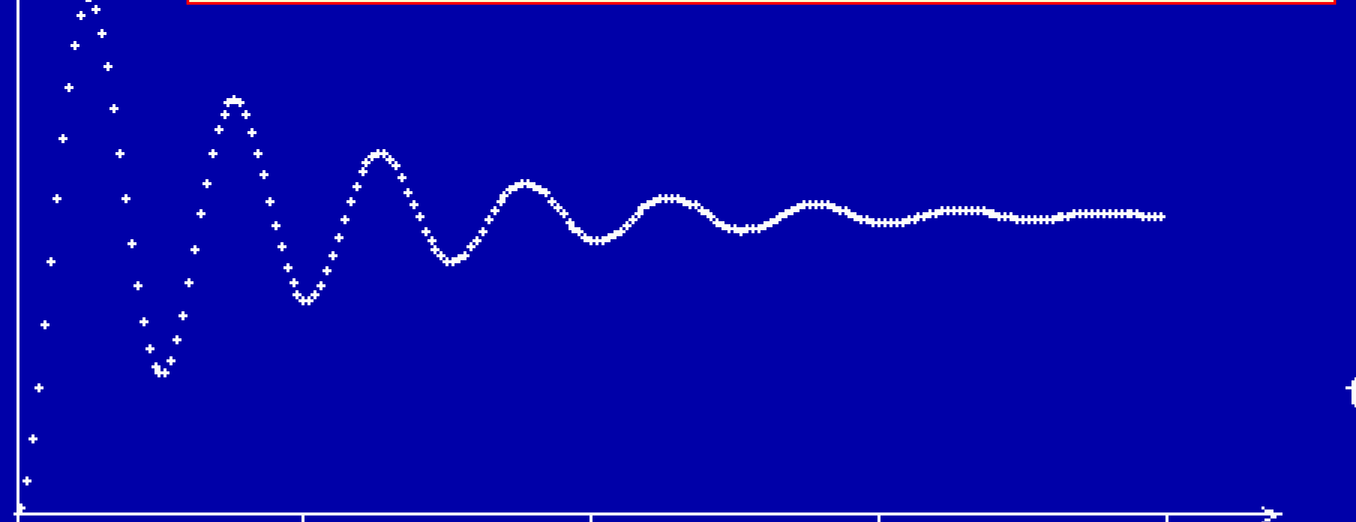
Press [Enter] Key to Continue

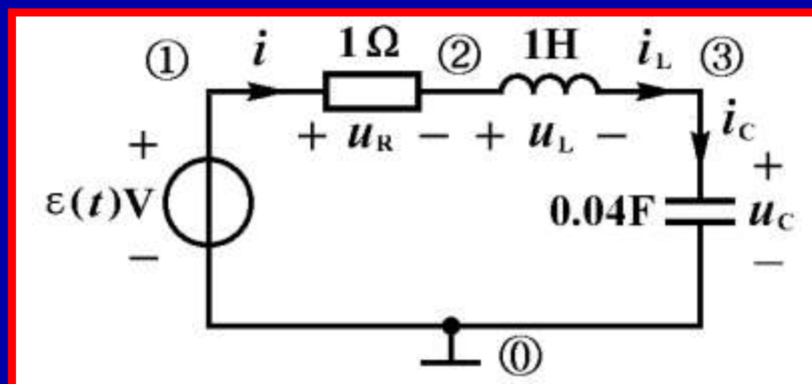
u4 (t) = .000 δ(t)

u4 (t) =ε(t)*[( 1.01 )* exp ( -.500 t)]cos( 4.97 t +174.3 )
+ε(t)* ( 1.00 +j .000 )*exp( .000 +j .000 )t

$$u_C(t)=[1.01e^{-0.5t}\cos(4.97t+174.3^\circ)+1]\varepsilon(t)\mathrm{V}$$

电容电压的波形



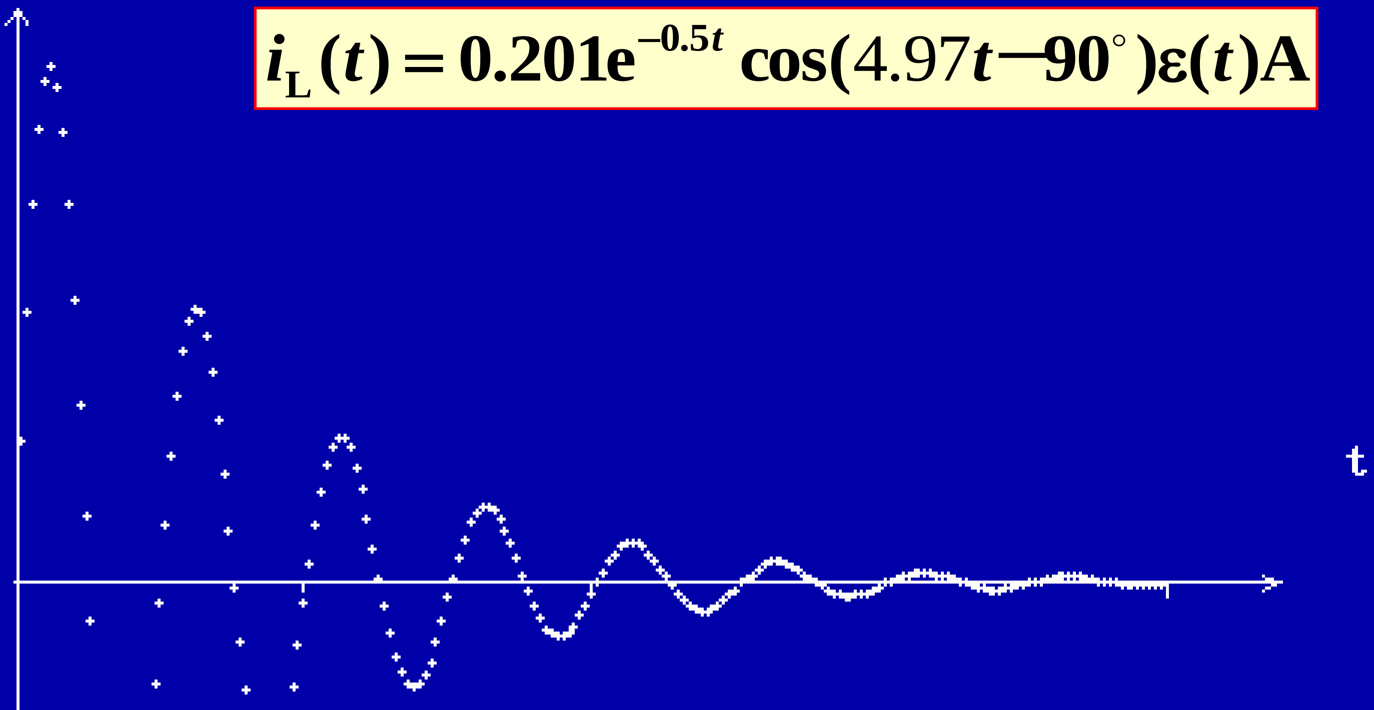
Press [Enter] Key to Continue

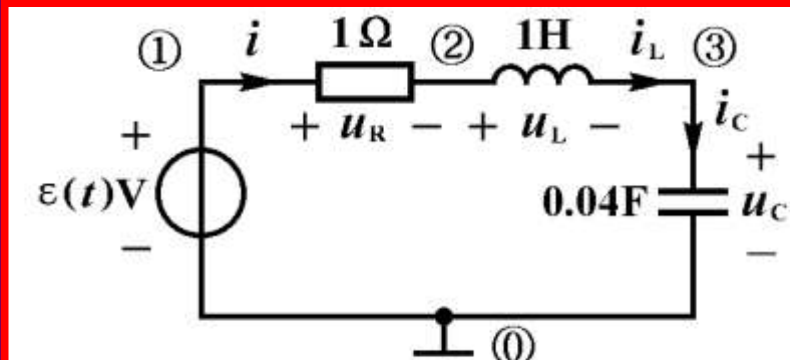
```
i3 (t) =   .000    δ(t)
       + ε(t)*  (   .000     +j  .101     )*exp( -.500     +j -4.97     )t
       + ε(t)*  (   .000     +j -.101     )*exp( -.500     +j  4.97     )t
```

i3 (t) = ε (t)*[( .201 )* exp ( -.500 t)]cos( 4.97 t -90.00 )

$$i_L(t) = 0.201e^{-0.5t}\cos(4.97t - 90^\circ)\varepsilon(t)\text{A}$$

电感电流的波形



# *RLC*串联电路响应

胡翔骏制作

高等教育出版社

在幻灯片放映时，请用鼠标单击图片放映录像。

根据教学需要，用鼠标点击名称的方法放映相关录像。

| | 名　称 | 时间 |
|---|---|---|
| 1 | *RLC*串联电路响应 | **1:49** |
| 2 | *RLC*串联电路的阶跃响应 | **2:22** |
| 3 | 回转器电感应用 | **2:59** |
| 4 | 电阻器和电感器串联电路响应 | **3:08** |


郁金香

# §9－3　*RLC*并联电路的响应

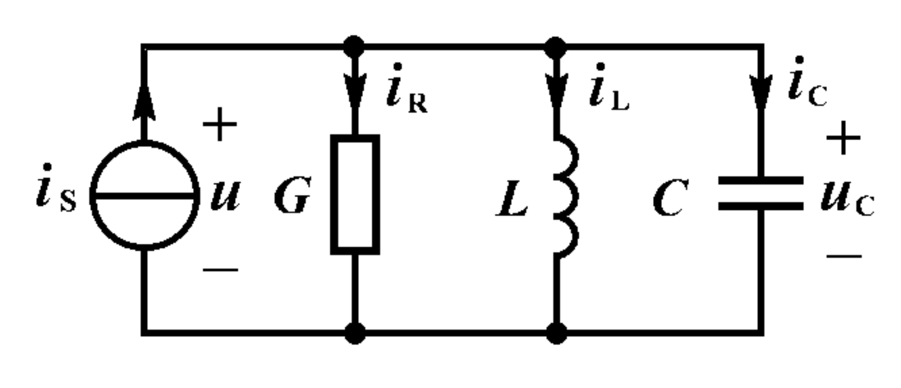



图9-8

*RLC*并联电路如图9-8所示，为了得到电路的二阶微分方程，列出KCL方程

$$i_R(t)+i_L(t)+i_C(t)=i_S(t)$$

代入电容，电阻和电感的VCR方程

$$u(t)=u_L(t)=u_C(t)=L\frac{di_L}{dt}$$

$$i_R(t)=Gu(t)=GL\frac{di_L}{dt}\qquad i_C(t)=C\frac{du}{dt}=LC\frac{d^2 i_L}{dt^2}$$

得到微分方程

$$LC\frac{d^2 i_L}{dt^2}+GL\frac{di_L}{dt}+i_L=i_S(t)$$

这是一个常系数非齐次线性二阶微分方程。

其特征方程为 $$LCs^2+GLs+1=0$$

由此求解得到特征根 $$s_{1,2}=-\frac{G}{2C}\pm\sqrt{\left(\frac{G}{2C}\right)^2-\frac{1}{LC}}$$

当电路元件参数$G,L,C$的量值不同时，特征根可能出现以下三种情况：

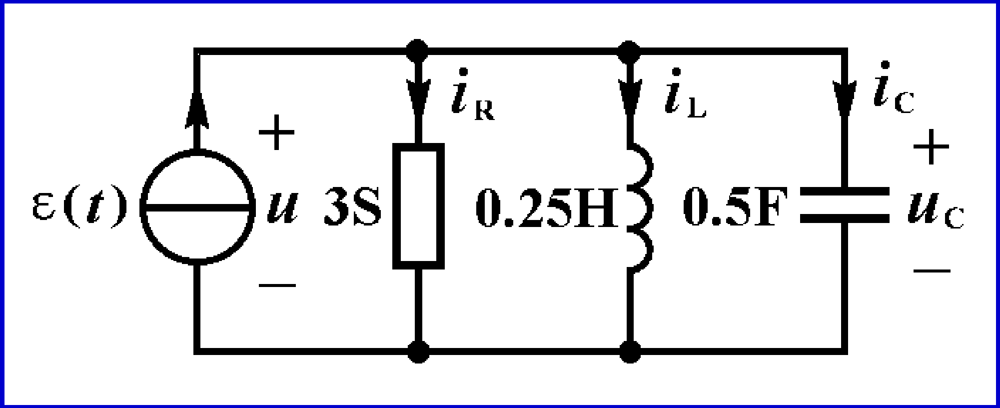
1. $G > 2\sqrt{\dfrac{C}{L}}$ 时，$s_1,s_2$为两个不相等的实根。

2. $G = 2\sqrt{\dfrac{C}{L}}$ 时，$s_1,s_2$为两个相等的实根。

3. $G < 2\sqrt{\dfrac{C}{L}}$ 时，$s_1,s_2$为共轭复数根。

当两个特征根为不相等的实数根时，称电路是过阻尼的；当两个特征根为相等的实数根时，称电路是临界阻尼的；当两个特征根为共轭复数根时，称电路是欠阻尼的。

例9-7 电路如图所示，已知$G$=3S,$L$=0.25H, $C$=0.5F, $i_S(t)=\varepsilon(t)$A。求$t$>0时电感电流和电容电压的零状态响应。




解：根据$G,L,C$ 的量值，计算出固有频率

$$s_{1,2}=-\frac{G}{2C}\pm\sqrt{\left(\frac{G}{2C}\right)^2-\frac{1}{LC}}=-3\pm\sqrt{3^3-8}=-3\pm1=\begin{cases}-2\\-4\end{cases}$$

这是两个不相等的实根，电感电流的表达式为

$$i_L(t) = K_1 e^{-2t} + K_2 e^{-4t} + 1\text{A} \qquad (t \geq 0)$$

利用电容电压的初始值$u_C(0)=0$和电感电流的初始值$i_L(0)=0$得到以下两个方程

$$i_L(0) = K_1 + K_2 + 1\text{A} = 0$$

$$\left.\frac{\mathrm{d}i_L(t)}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} = -2K_1 - 4K_2 = \frac{u_C(0)}{L} = 0$$

求得常数$K_1=-2$,$K_2=1$。最后得到电感电流和电容电压

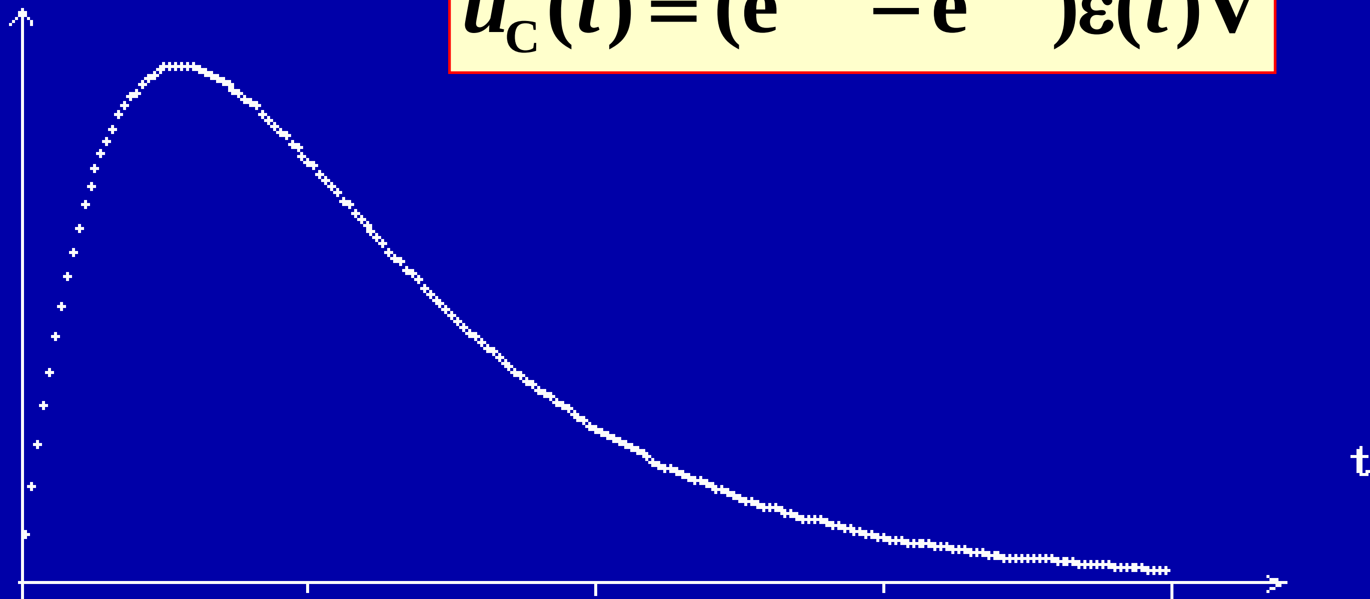
$$i_L(t) = (-2e^{-2t} + e^{-4t} + 1)\text{A} \qquad (t \geq 0)$$

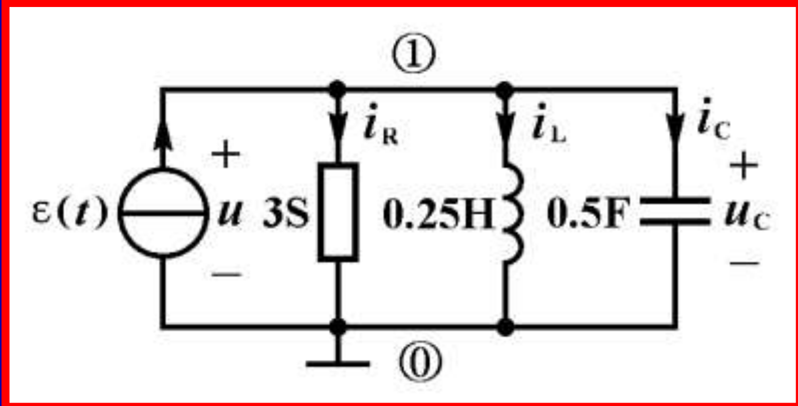
$$u_L(t) = u_C(t) = L\frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t} = (e^{-2t} - e^{-4t})\text{V} \qquad (t > 0)$$

Press [Enter] Key to Continue

```
u4 (t) =   .000    δ(t)
       + ε(t)*  (  1.00     +j  .000     )*exp( -2.00    +j  .000     )t
       + ε(t)*  ( -1.00     +j  .000     )*exp( -4.00    +j  .000     )t
```

$$u_C(t) = (e^{-2t} - e^{-4t})\varepsilon(t)\mathrm{V}$$



Press [Enter] Key to Continue

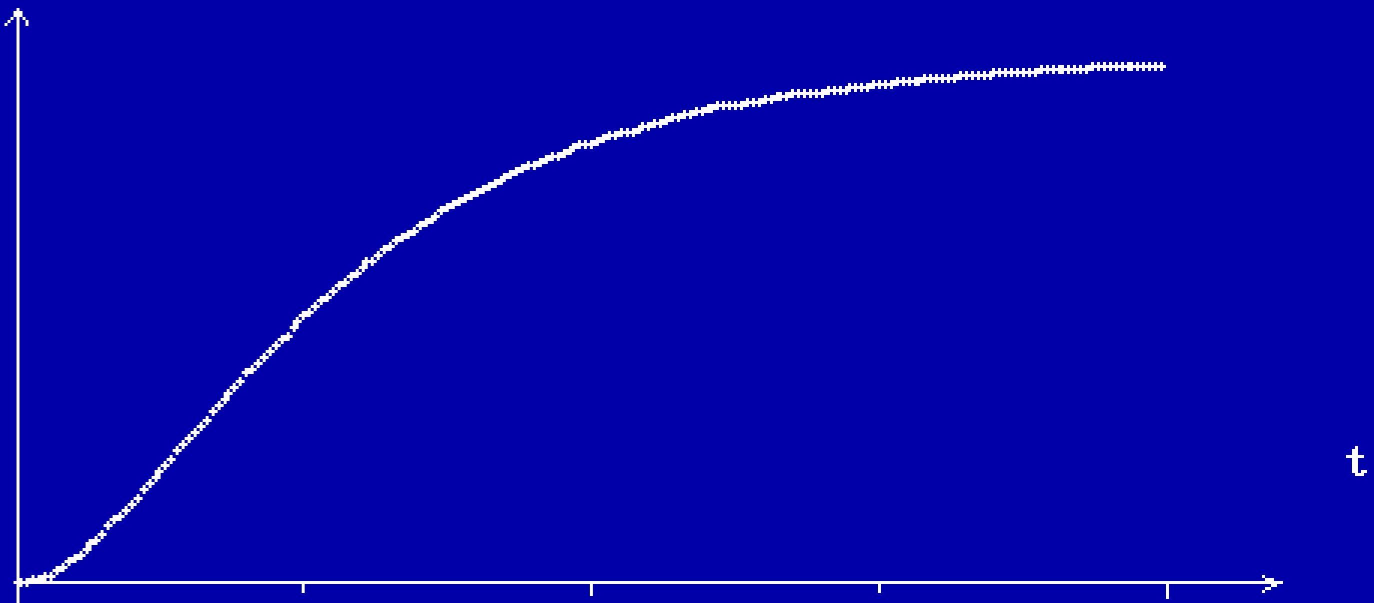
i3 (t) = .000 δ(t)

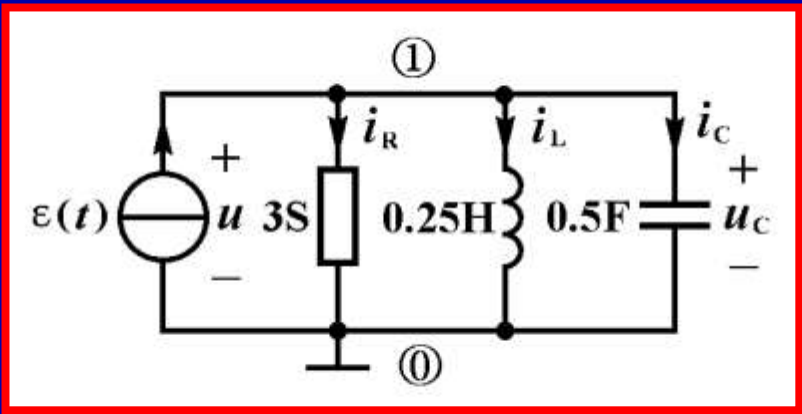
+ ε(t ... 00 )t

+ ε(t ... 00 )t

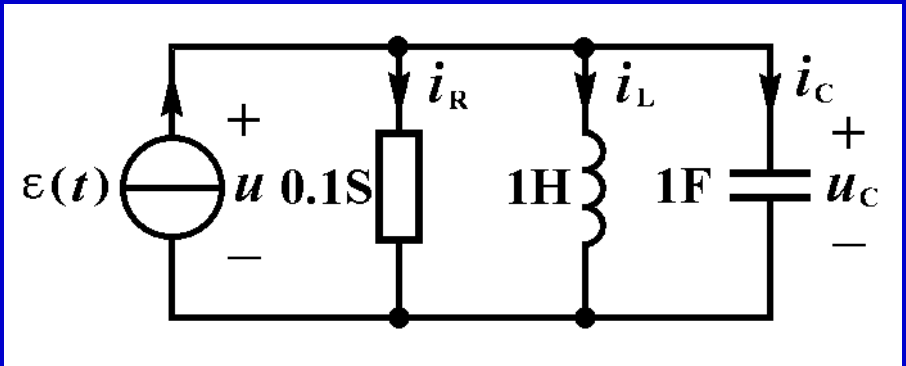
+ ε(t ... 00 )t

$$i_L(t) = (-2e^{-2t} + e^{-4t} + 1)\varepsilon(t)\text{A}$$



例9－8 图示 $RLC$并联电路中，已知$G$=0.1S,$L$=1H, $C$=1F, $i_S(t)=\varepsilon(t)$A。求$t$>0时，电感电流的零状态响应。




解：首先计算固有频率

$$s_{1,2}=-\frac{G}{2C}\pm\sqrt{\left(\frac{G}{2C}\right)^2-\frac{1}{LC}}=-\frac{1}{20}\pm\sqrt{\frac{1}{400}-1}\approx-0.05\pm \mathrm{j}1$$

其响应为

$$i_L(t)=[\mathrm{e}^{-0.05t}(K_1\cos t+K_2\sin t)+1]\mathrm{A}$$

利用零初始条件，得到

$$i_L(0) = K_1 + 1 = 0$$

$$\left.\frac{\mathrm{d}i_L(t)}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} = -0.05K_1 + K_2 = \frac{u_C(0)}{L} = 0$$

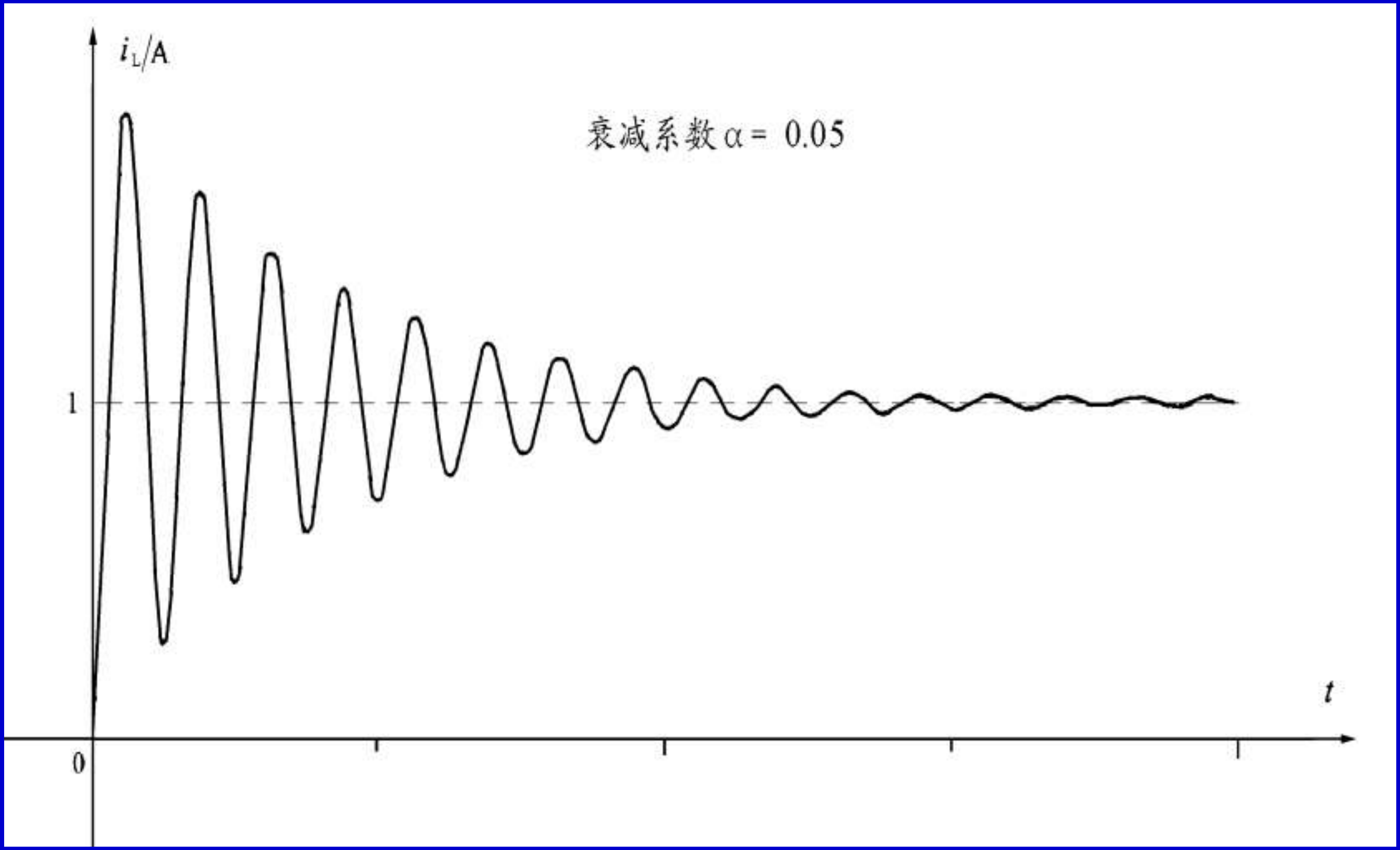
由此可得

$$K_1 = -1,\ K_2 = -0.05$$

最后得到电感电流为

$$\begin{aligned} i_L(t) &= [1 - \mathrm{e}^{-0.05t}(\cos t + 0.05\sin t)]\mathrm{A} \\ &\approx [1 - \mathrm{e}^{-0.05t}\cos t]\mathrm{A} \qquad (t > 0) \end{aligned}$$

用计算机程序DNAP画出的电感电流波形如下所示。




衰减系数为0.05的电感电流的波形

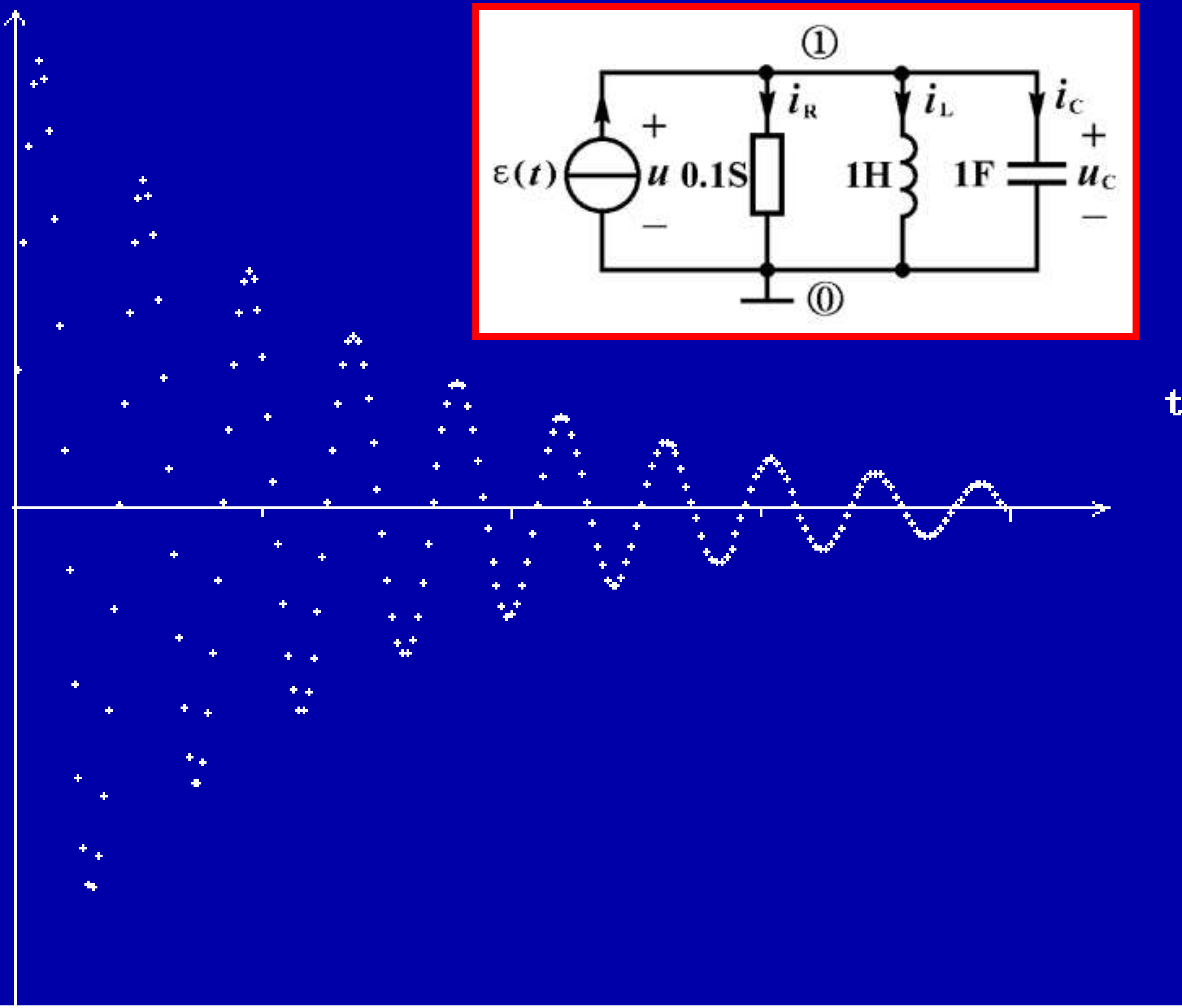
Press [Enter] Key to Continue

u4 (t) = .000 δ(t)

+ ε(t)* ( .000 +j .501 )*exp( -.500E-01+j -.999 )t

u4 (t) )

$$u_C(t) = [e^{-0.05t}\cos(0.999t - 90^\circ)]\varepsilon(t)\,\mathrm{V}$$

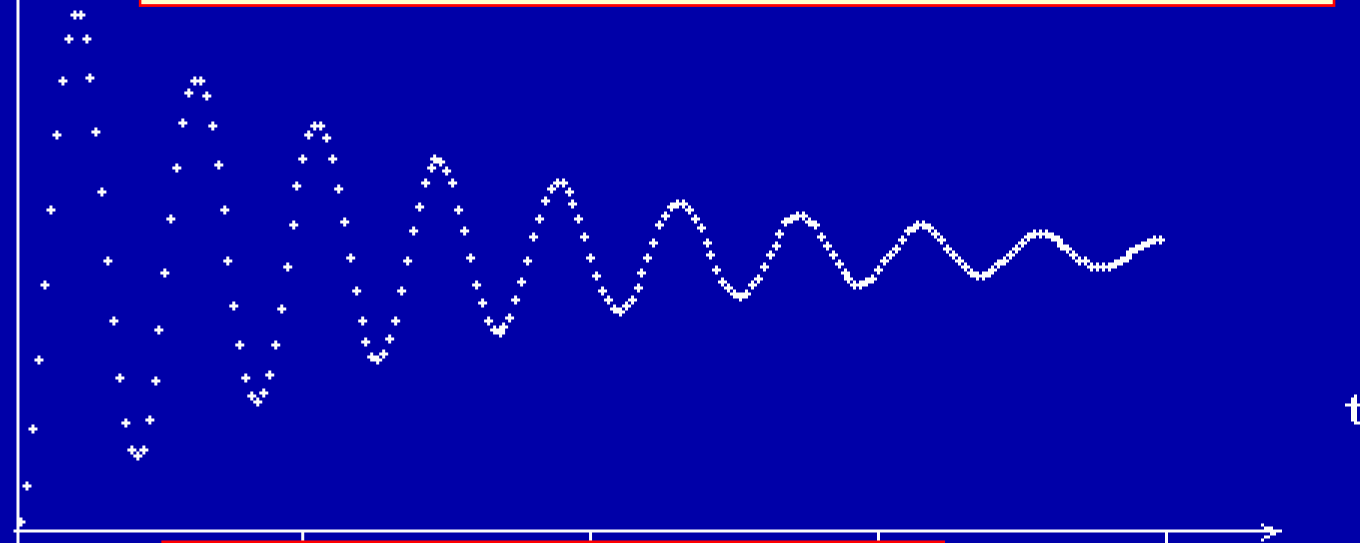


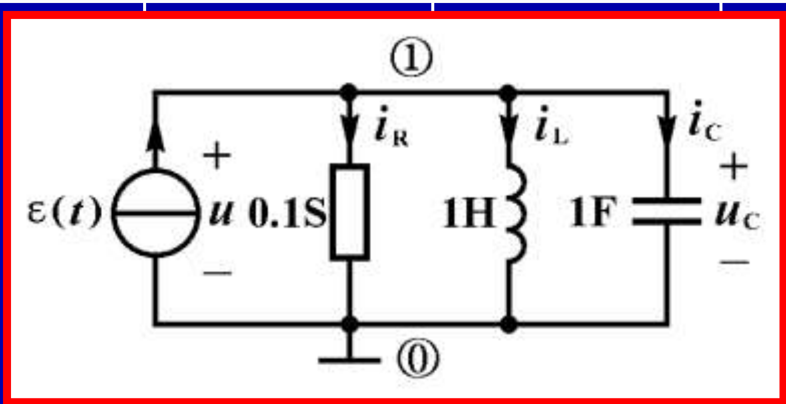
Press [Enter] Key to Continue

i3 (t) = .000 δ(t)

i3 (t) =ε(t)*[( 1.00 )* exp ( -.500E-01t)]cos( .999 t +177.1 )
+ε(t)* ( 1.00 +j .000 )*exp( .000 +j .000 )t

$$i_L(t) = [1 - e^{-0.05t} \cos(0.999t + 177.1^\circ)]\varepsilon(t)\text{A}$$



根据教学需要，用鼠标点击名称的方法放映相关录像。

| | 名　称 | 时间 |
|---|---|---|
| 1 | *RLC*串联电路响应 | 1:49 |
| 2 | *RLC*串联电路的阶跃响应 | 2:22 |
| 3 | 回转器电感应用 | 2:59 |
| 4 | 电阻器和电感器串联电路响应 | 3:08 |


郁金香

# §9—4 一般二阶电路分析

除了*RLC*串联和并联二阶电路以外，还有很多由两个储能元件以及一些电阻构成的二阶电路。本节讨论这些电路的分析方法，关键的问题是如何建立电路的二阶微分方程以及确定相应的初始条件。现在举例加以说明。

例9-9　图9-10(a)所示电路在开关转换前已经达到稳态，已知$u_S(t)=6e^{-3t}$V，$t$=0闭合开关。试求$t≥0$时电容电压$u_C(t)$的全响应。

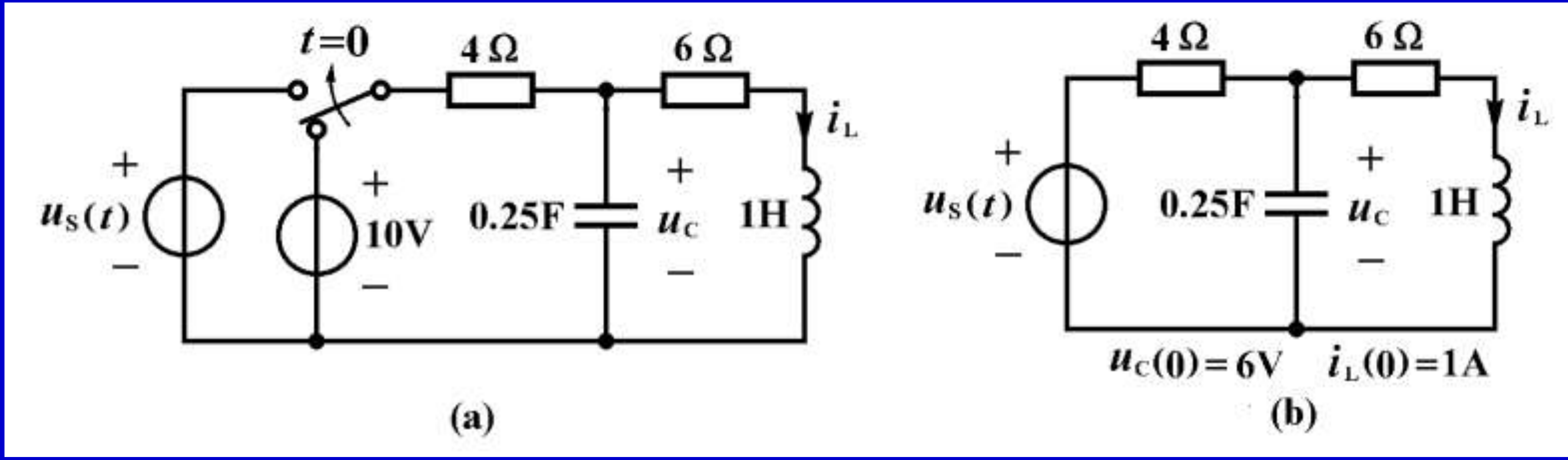



图9-10

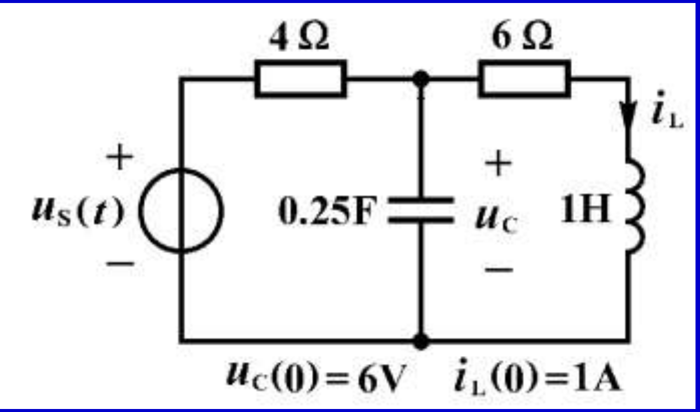
解：先求出电容电压和电感电流的初始值为

$$u_C(0_+)=u_C(0_-)=\frac{6}{4+6}\times10V=6V$$

$$i_L(0_+)=i_L(0_-)=\frac{10V}{(4+6)\Omega}=1A$$

由此得到$t>0$的电路如图(b)所示。

以电容电压$u_C(t)$和电感电流$i_L(t)$为变量，列出两个网孔的KVL方程




$$\begin{cases} 4\left(\dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{du_C}{dt}+i_L\right)+u_C=u_S \\ -u_C+6i_L+1\cdot\dfrac{di_L}{dt}=0 \end{cases}$$

从这两个微分方程中消去电感电流$i_L(t)$，可以得到以电容电压$u_C(t)$为变量的二阶微分方程。一种较好的方法是引用微分算子 $s=\dfrac{d}{dt}$ 将以上微分方程变换成代数方程

$$\begin{cases} (s+1)u_C+4i_L=u_S \\ -u_C+(s+6)i_L=0 \end{cases}$$

用克莱姆法则求得

$$u_C = \frac{(s+6)u_S}{(s+1)(s+6)+4} = \frac{(s+6)u_S}{s^2+7s+10}$$

将上式改写为

$$(s^2+7s+10)u_C = (s+6)u_S$$

最后将微分算子反变换得到以电容电压为变量的二阶微分方程

$$\frac{d^2u_C}{dt^2} + 7\frac{du_C}{dt} + 10u_C = \frac{du_S}{dt} + 6u_S$$

从特征方程

$$(s^2+7s+10)=0$$

求得特征根，即固有频率为

$$s_1=-2 \qquad s_2=-5$$

$u_C(t)$的固有响应为

$$u_{Ch}(t)=K_1\mathrm{e}^{-2t}+K_2\mathrm{e}^{-5t}$$

$u_C(t)$的强制响应为

$$u_{Cp}(t)=B\mathrm{e}^{-3t}$$

代入微分方程中得到

$$9B\mathrm{e}^{-3t}-21B\mathrm{e}^{-3t}+10B\mathrm{e}^{-3t}=-18\mathrm{e}^{-3t}+36\mathrm{e}^{-3t}$$

求得$B$=-9，即强制响应为$u_{\mathrm{Cp}}(t)=-9\mathrm{e}^{-3t}$。$u_{\mathrm{C}}(t)$的全响应为

$$u_{\mathrm{C}}(t)=u_{\mathrm{Ch}}(t)+u_{\mathrm{Cp}}(t)=K_1\mathrm{e}^{-2t}+K_2\mathrm{e}^{-5t}-9\mathrm{e}^{-3t}$$

现在利用初始条件确定常数$K_1$ 和$K_2$ 。将$u_{\mathrm{C}}(0_+)=6\mathrm{V}$代入上式得到

$$u_{\mathrm{C}}(0_+)=K_1+K_2-9=6$$

另外一个初始条件 $\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}(0_+)$ 可以从代数方程中求得

$$su_C = u_S - 4i_L - u_C$$

反变换得到 $\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}(0_+)$ 与$u_C(0_+)$, $i_L(0_+)$, $u_S(0_+)$的关系式

$$\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}(0_+) = u_S(0_+) - 4i_L(0_+) - u_C(0_+) = 6 - 4 - 6 = -4$$

得到

$$\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}(0_+) = -2K_1 - 5K_2 + 27 = -4$$

$$u_C(0_+) = K_1 + K_2 - 9 = 6$$

$$\frac{du_C}{dt}(0_+) = -2K_1 - 5K_2 + 27 = -4$$

联立求解以上两个代数方程可以得到

$$K_1 = \frac{44}{3} \qquad K_2 = \frac{1}{3}$$

最后得到电容电压$u_C(t)$的全响应表达式

$$u_C(t) = \left(\frac{44}{3}e^{-2t} + \frac{1}{3}e^{-5t} - 9e^{-3t}\right)\text{V} \qquad (t \geq 0)$$

从以上计算过程可以看出，采用微分算子将微分方程变换成代数方程，采用代数运算的方法可以求得微分方程和求解微分方程所需的初始条件。

建立二阶微分方程的主要步骤如下：

1. 以$u_C(t)$和$i_L(t)$为变量列出两个电路微分方程。

2. 利用微分算子和将微分方程变换为两个代数方程。

3. 联立求解两个代数方程得到解答$x=P(s)/Q(s)$,其中$x$表示电容电压$u_C(t)$或电感电流$i_L(t)$，$P(s)$,$Q(s)$是s的多项式。

4. 将$x=P(s)/Q(s)$改写为$Q(s)x=P(s)$形式，再反变换列出二阶微分方程。

例9-10 电路如图9-11所示，以$u_C(t)$为变量的列出电路微分方程。

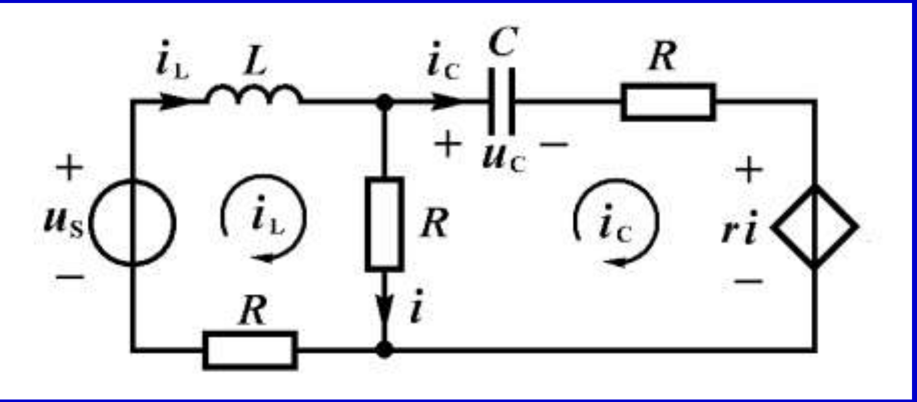



图9-11

解：以$i_L(t)$和$u_C(t)$为变量列出两个网孔的KVL方程

$$\begin{cases} L\dfrac{di_L}{dt} + 2Ri_L - RC\dfrac{du_C}{dt} = u_S \\ (r-R)i_L + (2R-r)C\dfrac{du_C}{dt} + u_C = 0 \end{cases}$$

引用微分算子$s=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$将以上微分方程变换成代数方程

$$\begin{cases}(Ls+2R)i_{\mathrm{L}}-RCsu_{\mathrm{C}}=u_{\mathrm{S}}\\(r-R)i_{\mathrm{L}}+(2RCs-rCs+1)u_{\mathrm{C}}=0\end{cases}$$

用克莱姆法则求得

$$u_{\mathrm{C}}=\frac{-(r-R)u_{\mathrm{S}}}{(Ls+2R)(2RCs-rCs+1)+(r-R)RCs}$$

$$=\frac{(R-r)u_{\mathrm{S}}}{(2R-r)LCs^2+(L+3R^2C-rRC)s+2R}$$

反变换可以得到以电容电压$u_{\mathrm{C}}(t)$为变量的二阶微分方程

$$(2R-r)LC\frac{\mathrm{d}^2u_{\mathrm{C}}}{\mathrm{d}t^2}+(L+3R^2C-rRC)\frac{\mathrm{d}u_{\mathrm{C}}}{\mathrm{d}t}+2Ru_{\mathrm{C}}=(R-r)u_{\mathrm{S}}$$

$$(2R-r)LC\frac{\mathrm{d}^2u_C}{\mathrm{d}t^2}+(L+3R^2C-rRC)\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}+2Ru_C=(R-r)u_S$$

由此二阶非齐次微分方程的系数可见，当$r=R$时，变为齐次微分方程，响应与电源电压$u_S(t)$无关，且具有零输入响应的性质。

假设改变电路参数，令$r=2R$时，二阶项的系数为零，以上方程变为

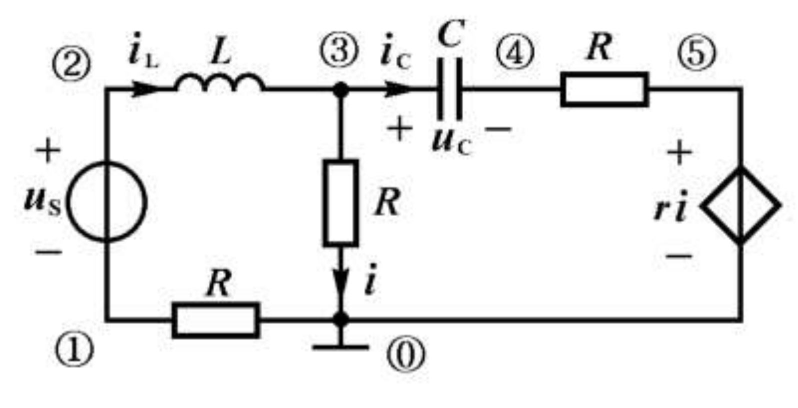
$$(L+R^2C)\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}+2Ru_C=-Ru_S$$

此式是一阶微分方程，说明图9－11电路此时是一个一阶电路。

假设人们能够实现负电感或负电容，使电路参数满足条件$L+R^2C=0$，则一阶项系数也变为零，此时微分方程 $2u_C=-u_S$ 将变为一个代数方程了。

由此分析可见，假如能够写出电路参数($R$、$L$、$C$、$r$…)用符号表示的电路微分方程，就容易看出电路参数对电路响应的影响，这对电路的分析和设计是十分有益的。

用笔算方法列出高阶动态电路的*n*阶微分方程比较困难，我们可以利用计算机程序SNAP来列出微分方程，将图9－11各结点编号，如图9－12(a)所示。



(a)

```
Example 9-10
7
R    1   1   0       R
V    2   2   1       Us
L    3   2   3       L
R    4   3   0       R
C    5   3   4       C
R    6   4   5       R
CV   7   5   0   4   r
```

(b)

图9－12

运行符号网络分析程序SNAP，读入图9－12(b)所示电路数据，得到电容电压和电感电流的频域表达式。

```
----- 结 点 电 压 ， 支 路 电 压 和 支 路 电 流 -----

          RUs-rUs
U5 (S)= --------------------------------
         -SCSLr+2RSCSL+SL+3RRSC-RSCr+2R

         -SCrUs+2RSCUs+Us
I3 (S)= --------------------------------
         -SCSLr+2RSCSL+SL+3RRSC-RSCr+2R
```

以上各式中的S表示微分算子，即 $s=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$ ，用代数运算方法可得到以电容电压和电感电流为变量的微分方程。

$$(2R-r)LC\frac{\mathrm{d}^2u_\mathrm{C}}{\mathrm{d}t^2}+(L+3R^2C-rRC)\frac{\mathrm{d}u_\mathrm{C}}{\mathrm{d}t}+2Ru_\mathrm{C}=(R-r)u_\mathrm{S}$$

$$(2R-r)LC\frac{\mathrm{d}^2i_\mathrm{L}}{\mathrm{d}t^2}+(L+3R^2C-rRC)\frac{\mathrm{d}i_\mathrm{L}}{\mathrm{d}t}+2Ri_\mathrm{L}=(2R-r)C\frac{\mathrm{d}u_\mathrm{S}}{\mathrm{d}t}+u_\mathrm{S}$$

根据教学需要，用鼠标点击名称的方法放映相关录像。

| | 名　称 | 时间 |
|---|---|---|
| 1 | *RLC*串联电路响应 | **1:49** |
| 2 | *RLC*串联电路的阶跃响应 | **2:22** |
| 3 | 回转器电感应用 | **2:59** |
| 4 | 电阻器和电感器串联电路响应 | **3:08** |


郁金香

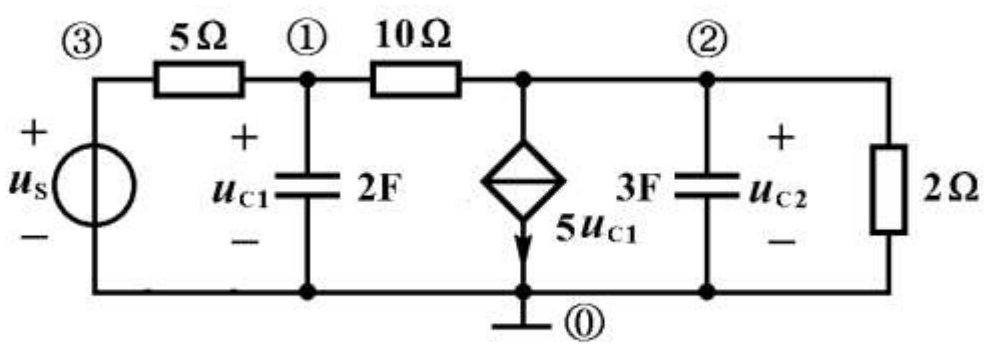
## §9—5 电路实验和计算机分析电路实例

首先介绍用计算机程序**DNAP**来建立动态电路的微分方程和计算电压电流的全响应。再介绍一种观测RLC串联二阶电路阶跃响应的实验方法。

## 一、计算机辅助电路分析

对于二阶以及三阶以上的动态电路，建立微分方程和确定相应的初始条件都十分困难。建立和求解*n*阶微分方程工作可以用计算机来完成这些工作。我们用动态电路分析程序DNAP，只需要将电路元件的连接关系，元件类型和参数，动态元件的初始值以及支路关联参考方向告诉计算机，就可以得到电路的微分方程，固有频率，电压电流的频域和时域解答，并可以画出波形曲线。现在举例加以说明。

例9－11 电路如图9－13(a)所示，已知$u_s(t)=6\varepsilon(t)$V，电容电压$u_{C1}(0)=2$V，$u_{C2}(0)=3$V,试以电容电压$u_{C1}(t)$为变量建立微分方程和计算电路的固有频率，并求电容电压$u_{C1}(t)$的零输入响应，零状态响应和全响应。

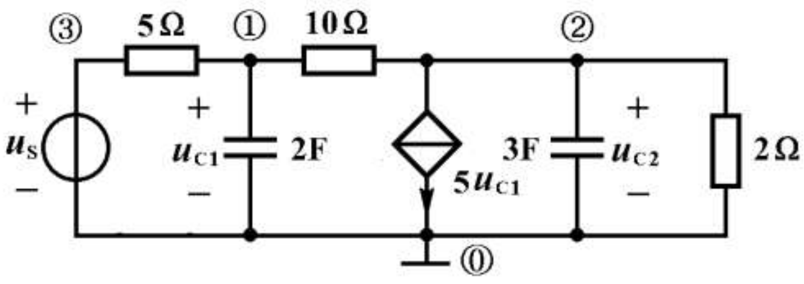



(a)

```
Example 9-11
7
V1    1   3   0       6
R     2   1   3       5
C     3   1   0       2   2
R     4   1   2       10
VC    5   2   0   3   5
C     6   2   0       3   3
R     7   2   0       2
```

(b)

图9－13




(a)

```
Example 9-11
7
V1    1   3   0       6
R     2   1   3       5
C     3   1   0       2   2
R     4   1   2       10
VC    5   2   0   3   5
C     6   2   0       3   3
R     7   2   0       2
```

(b)

图9－13

解：用DNAP程序分析图9－13(a)电路的数据文件如图9－13(b)所示，其中V1表示阶跃电压源，电容元件的初始电压由该行的最后一个数据表示。运行DNAP程序，正确读入图9－13(b)所示数据后，选择建立微分方程的菜单和结点电压V1作为方程的变量，可以得到以下计算结果。

```
<<< ----- 微 分 方 程 ----- >>>
         D = (dx/dt) -> 微 分 算 子
1.00     D**2(v1) +.350     D   (v1) +.112          (v1)
                =  .100     D   (v1)+2.000E-02      (v1)
```

式中D表示微分算子，所得到的微分方程如下所示

$$\frac{\mathrm{d}^2u_{\mathrm{C1}}}{\mathrm{d}t^2}+0.35\frac{\mathrm{d}u_{\mathrm{C1}}}{\mathrm{d}t}+0.112u_{\mathrm{C1}}=0.1\frac{\mathrm{d}u_{\mathrm{S}}}{\mathrm{d}t}+0.02u_{\mathrm{S}}$$

计算机得到的固有频率如下所示

```
    <<<   网 络 的 自 然 频 率   >>>
  S 1 =  -.1750      +j  -.2847     rad/s
S 2 =  -.1750      +j   .2847     rad/s
```

固有频率为 $s_1=-0.175-\mathrm{j}0.2847, s_2=-0.175+\mathrm{j}0.2847$

## 计算机得到的电容电压$u_{C1}(t)$如下所示

```
<<  阶 跃 电 源   V 1(t)=  6.00    ε(t) 单 独 作 用 >>
v1 (t) =  ε(t)*( -.537    +j  .724     )*exp ( -.175    +j -.285    )t
          + ε(t)*( -.537    +j -.724     )*exp ( -.175    +j  .285    )t
          + ε(t)*(  1.07    +j  .000     )*exp (  .000    +j  .000    )t
             << 初 始 状 态 Vc 3(0)=  2.00       单 独 作 用 >>
          + ε(t)*(  1.00    +j  .878E-01)*exp ( -.175    +j -.285    )t
          + ε(t)*(  1.00    +j -.878E-01)*exp ( -.175    +j  .285    )t
             << 初 始 状 态 Vc 6(0)=  3.00       单 独 作 用 >>
          + ε(t)*(  .000    +j  .263     )*exp ( -.175    +j -.285    )t
          + ε(t)*(  .000    +j -.263     )*exp ( -.175    +j  .285    )t
                    *****  完 全 响 应  *****
 v1 (t) = ε(t)*(  .463    +j  1.07     )*exp ( -.175    +j -.285    )t
          + ε(t)*(  .463    +j -1.07     )*exp ( -.175    +j  .285    )t
          + ε(t)*(  1.07    +j  .000     )*exp (  .000    +j  .000    )t
 v1 (t) = ε (t)*[(  2.34  )*exp ( -.175  t)]cos(  .285 t -66.71     )
          + ε (t)*(  1.07    +j  .000    )*exp (  .000    +j  .000    )t
```

这表示阶跃电压源6ε($t$)V单独作用引起的零输入响应为

$$v_1(t) = [1.07 + (-0.537 + \mathrm{j}0.724)\mathrm{e}^{-(0.175+\mathrm{j}0.285)t}$$
$$+ (-0.537 - \mathrm{j}0.724)\mathrm{e}^{-(0.175-\mathrm{j}0.285)t}]\,\varepsilon(t)$$

电容电压$u_{C1}$(0)=2V单独作用引起的零状态响应为

$$v_1(t) = [(1 + \mathrm{j}0.0878)\mathrm{e}^{-(0.175+\mathrm{j}0.285)t}$$
$$+ (1 - \mathrm{j}0.0878)\mathrm{e}^{-(0.175-\mathrm{j}0.285)t}]\,\varepsilon(t)$$

电容电压$u_{C2}$(0)=3V单独作用引起的零状态响应为

$$v_1(t) = [\mathrm{j}0.263\mathrm{e}^{-(0.175+\mathrm{j}0.285)t} - \mathrm{j}0.263\mathrm{e}^{-(0.175-\mathrm{j}0.285)t}]\,\varepsilon(t)$$

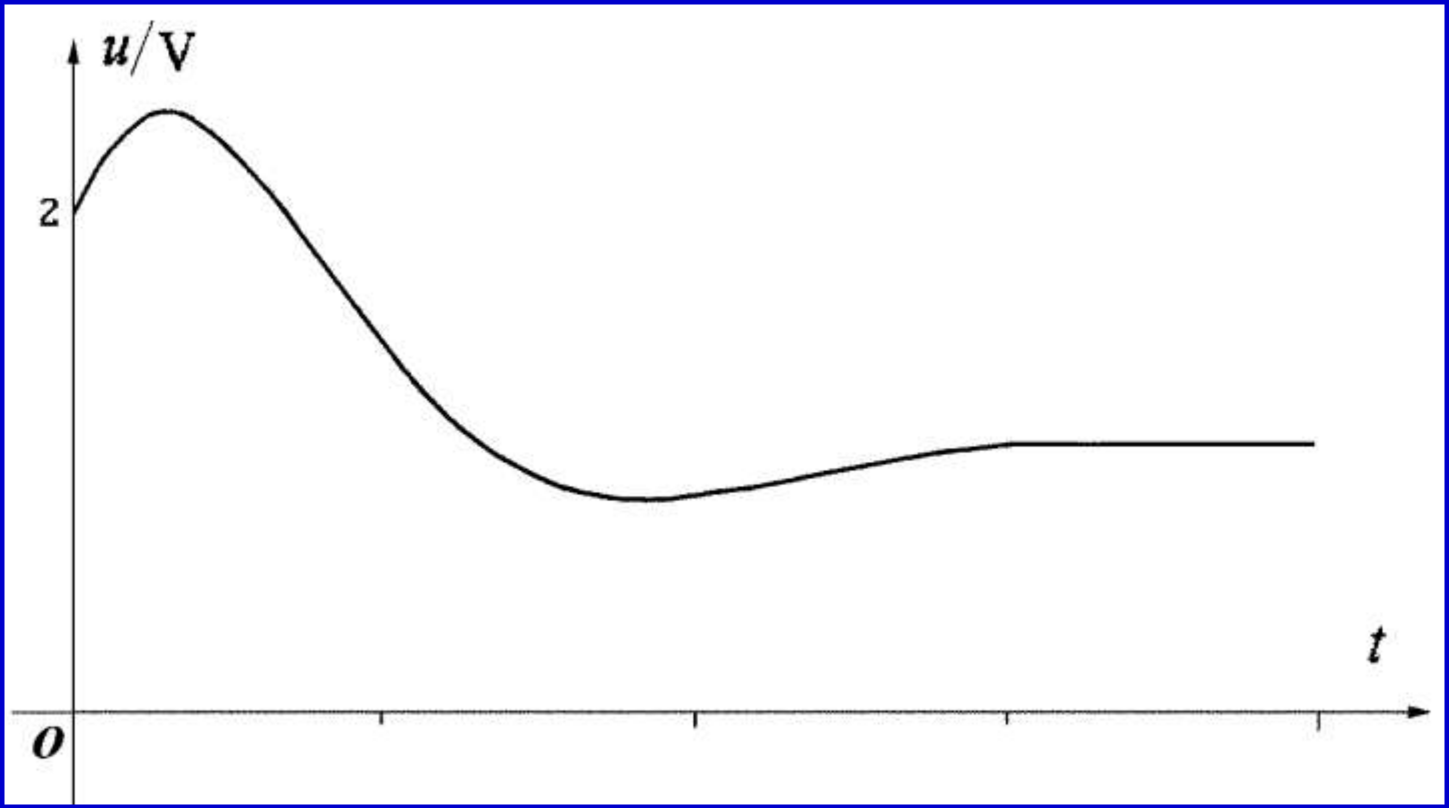
电容电压$u_{C1}(t)$的完全响应为

$$v_1(t) = [1.07 + (0.463 + \mathrm{j}1.07)\mathrm{e}^{-(0.175+\mathrm{j}0.285)t} + (0.465 - \mathrm{j}1.07)\mathrm{e}^{-(0.175-\mathrm{j}0.285)t}]\varepsilon(t)$$
$$= [1.07 + 2.34e^{-0.175t}\cos(0.285t - 66.71^\circ)]\varepsilon(t)$$

## 电容电压$u_{C1}(t)$的波形曲线为

```
***** 画 v1 (t)  的 波 形 *****
  Time (s)   v1 (t)       Min=   .8829                 Max=   2.440
 0.000E+00  2.000E+00                                     *
 2.000E+00  2.440E+00                                                   *
 4.000E+00  2.236E+00                                             *
 6.000E+00  1.775E+00                              *
 8.000E+00  1.330E+00                *
 1.000E+01  1.029E+00      *
 1.200E+01  8.942E-01  *
 1.400E+01  8.829E-01  *
 1.600E+01  9.367E-01   *
 1.800E+01  1.006E+00     *
 2.000E+01  1.062E+00       *
 2.200E+01  1.093E+00        *
 2.400E+01  1.103E+00         *
 2.600E+01  1.099E+00        *
 2.800E+01  1.090E+00        *
 3.000E+01  1.080E+00        *
 3.200E+01  1.074E+00        *
 3.400E+01  1.071E+00       *
 3.600E+01  1.071E+00       *
 3.800E+01  1.072E+00       *
 4.000E+01  1.073E+00        *
```

电容电压$u_{C1}(t)$的波形曲线为



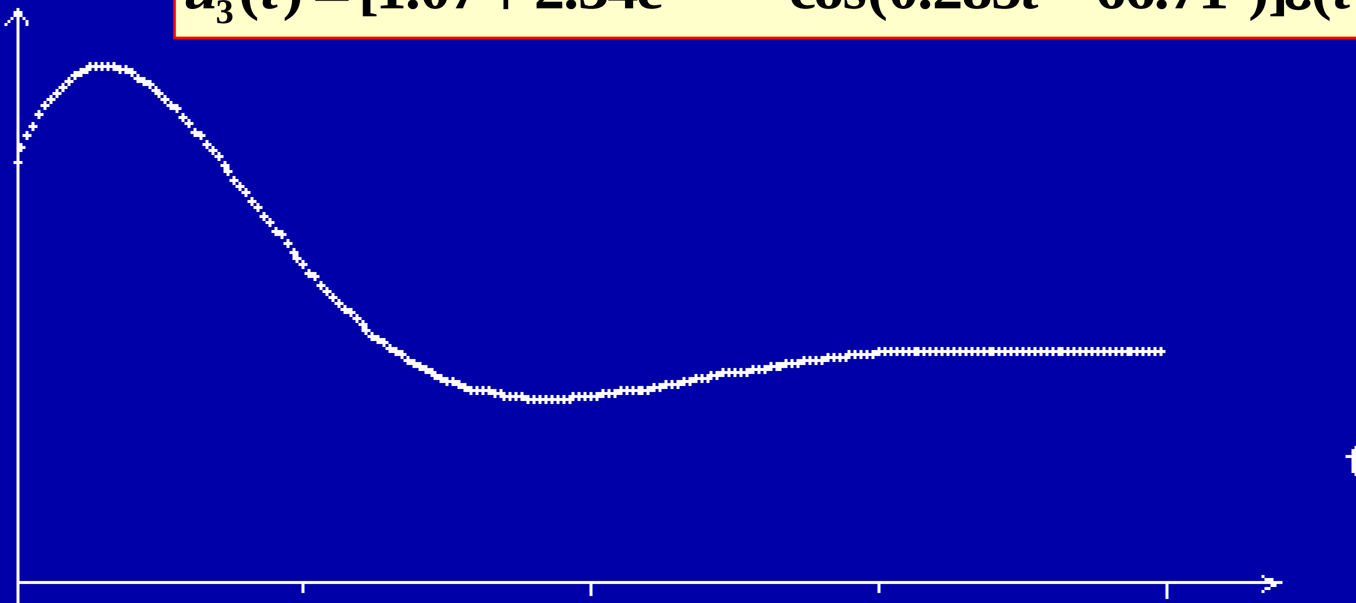
Press [Enter] Key to Continue

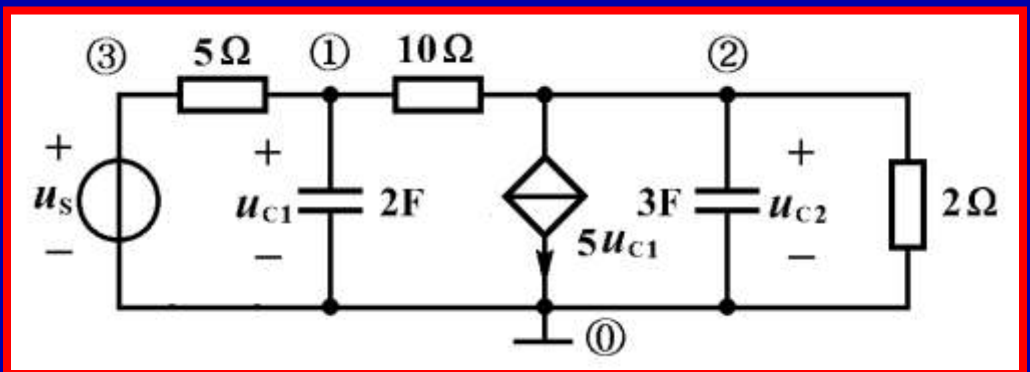
v1 (t) = .000 δ(t)

v1 (t) = ε (t)*[( 2.34 )* exp ( -.175 t)]cos( .285 t -66.71 )
+ ε (t)* ( 1.07 +j .000 )*exp( .000 +j .000 )t

$$u_3(t) = [1.07 + 2.34\mathrm{e}^{-0.175t}\cos(0.285t - 66.71^\circ)]\varepsilon(t)$$

电容电压的波形曲线



## 二、电路实验设计

用实验方法观察RLC串联电路阶跃响应的时候，由于信号发生器的输出电阻和电感线圈电阻的影响，观察不到回路电阻很小时的振荡波形。下面举例说明如何减小RLC串联电路回路总电阻的实验方法，可以观察到等幅振荡的正弦波形。

例9—12 试用电压跟随器和回转器构成一个*RLC*串联电路，观察电阻变化时电感电压阶跃响应波形的变化。

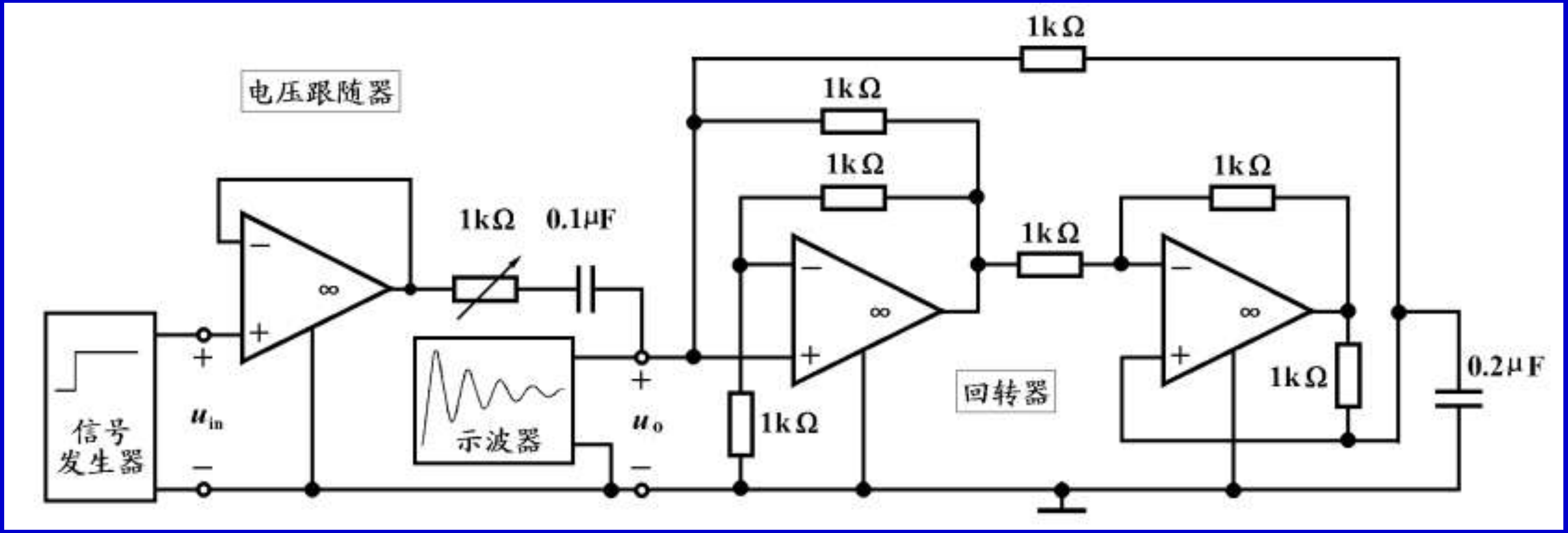



图9—15　观察RLC串联电路阶跃响应的试用电路

解:实验方法观察RLC串联电路阶跃响应的方法是将方波信号加在电路的输入端，用示波器观察电感或电容的电压。

由于信号发生器的输出电阻和电感线圈的电阻的影响，观察不到回路电阻很小时的振荡情况。此时我们可以采用两种方法来减小回路的总电阻，一个方法是在信号发生器的输出端接一个运放电压跟随器，它可以使输出电阻接近于零。第二个方法是不采用电感线圈，而采用回转器变换电容的电感，它可以将电感电阻减小为零。采用这两种方法就可以观察到等幅振荡的波形。具体的实验电路模型如图9－15所示，其中电压跟随器部分，请参考第五章第三节的有关内容，其中回转器将0.2μF电容变换为0.2H的电感，请参考第七章例7－13的内容。具体的实验过程和示波器所观察到的波形录像请参看教材光盘中提供的“RLC串联电路的响应”。

# 电路综合应用实验

## *RLC*串联电路的阶跃响应

胡翔骏制作

高等教育出版社

在幻灯片放映时，请用鼠标单击图片放映录像。

根据教学需要，用鼠标点击名称的方法放映相关录像。

| | 名　称 | 时间 |
|---|---|---|
| 1 | *RLC*串联电路响应 | 1:49 |
| 2 | *RLC*串联电路的阶跃响应 | 2:22 |
| 3 | 回转器电感应用 | 2:59 |
| 4 | 电阻器和电感器串联电路响应 | 3:08 |

# 摘　要

1．*RLC*串联电路的零输入响应与电路的固有频率(特征根)密切相关,其固有频率的公式为

$$s_{1,2}=-\frac{R}{2L}\pm\sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2-\frac{1}{LC}}$$

随着*R*、*L*、*C*参数的变化，可能出现以下三种情况：

1) $R>2\sqrt{\frac{L}{C}}$ 时，$s_1, s_2$为两个不相等的实根，称为过阻尼情况，响应具有以下形式

$$f(t)=K_1\mathrm{e}^{s_1t}+K_2\mathrm{e}^{s_2t}$$

2) $R > 2\sqrt{\dfrac{L}{C}}$ 时， $s_1, s_2$为两个相等的实根，称为临界情况，响应具有以下形式

$$f(t) = K_1 \mathrm{e}^{st} + K_2 t \mathrm{e}^{st}$$

3) $R < 2\sqrt{\dfrac{L}{C}}$ 时， $s_1, s_2$为共轭复数根，称为欠阻尼情况，响应具有以下形式

$$f(t) = K\mathrm{e}^{-\alpha t}\cos(\omega_{\mathrm{d}} t + \varphi)$$

这是一种衰减的振荡。当电阻$R$=0时，电路中没有损耗，响应变成等幅振荡。

2．*RLC*并联电路的零输入响应与电路的固有频率(特征根)密切相关,其固有频率的公式为

$$s_{1,2} = -\frac{G}{2C} \pm \sqrt{\left(\frac{G}{2C}\right)^2 - \frac{1}{LC}}$$

随着*G*、*C*、*L*参数的变化，可能出现以下三种情况：

1) $G > 2\sqrt{\frac{C}{L}}$ 时，为两个不相等的实根，称为过阻尼情况，响应具有以下形式

$$f(t) = K_1 \mathrm{e}^{s_1 t} + K_2 \mathrm{e}^{s_2 t}$$

2) $G=2\sqrt{\dfrac{C}{L}}$ 时，$s_1, s_2$为两个相等的实根，称为临界情况，响应具有以下形式

$$f(t)=K_1\mathrm{e}^{st}+K_2t\mathrm{e}^{st}$$

3) $G<2\sqrt{\dfrac{C}{L}}$ 时，$s_1, s_2$为共轭复数根，称为欠阻尼情况，响应具有以下形式

$$f(t)=K\mathrm{e}^{-\alpha t}\cos(\omega_{\mathrm{d}}t+\varphi)$$

这是一种衰减的振荡。当电阻$G$=0时，电路中没有损耗，响应变成等幅振荡。

3．含源线性二阶电路的全响应等于固有响应与强制响应之和，其中固有响应是对应齐次微分方程的通解$f_h(t)$ ；强制响应是非齐次微分方程的特解$f_p(t)$ 。

线性含源二阶电路的全响应也等于零输入响应与零状态响应之和。其中零输入响应是仅由初始状态引起的响应；零状态响应是仅由独立电源引起的响应。

4．用时域方法分析求解$n$阶动态电路响应$f(t)$的一般方法是

1)列出以为变量的$n$阶微分方程

2)找出确定待定常数所需要的初始条件

$$f(0_+),\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}(0_+)\ldots\ldots\frac{\mathrm{d}^{n-1}f}{\mathrm{d}t^{n-1}}(0_+)$$

3)求出对应齐次微分方程的通解$f_h(t)$和非齐次微分方程的特解$f_p(t)$，然后将它们相加得到完全响应。

$$f(t) = f_h(t) + f_p(t)$$

4)利用初始条件 $f(0_+), \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}(0_+) \cdots \frac{\mathrm{d}^{n-1} f}{\mathrm{d}t^{n-1}}(0_+)$ 确定响应中的待定常数，得到响应$f(t)$的表达式。

动态电路的完全响应由独立电源和储能元件的初始状态共同产生。仅由初始状态引起的响应称为零输入响应；仅由独立电源引起的响应称为零状态响应。线性动态电路的全响应等于零输入响应与零状态响应之和。

郁金香